4. Programmierparadigmen zu Listen; Grundlagen

Listen in SML sind **homogen**, die Elemente einer Liste haben denselben Typ.
Vordefinierter Typ:

```
datatype 'a list = nil | :: of 'a * 'a list
```

Konstruktoren:

```
nil        =  []
x :: xs    :: ist rechtsassoziativ: 3 :: 4 :: 5 :: nil = [3, 4, 5]
```

Vordefinierte Funktionen:

`length l`	Anzahl der Elemente in `l`
`hd l`	erstes Element von `l`
`tl`	`l` ohne das erste Element
`null l`	ist `l` = `nil`?
`rev l`	`l` in umgekehrter Reihenfolge
`l1 @ l2`	Konkatenation von `l1` und `l2`

Beispiel:

```
fun upto (m, n) = if m > n then [] else m :: upto (m+1, n);
```


Rekursionsmuster Listentyp

Struktur des Datentyps:

```
datatype 'a list = nil | :: of ('a * 'a list)
```

Paradigma: Funktionen haben die **gleiche Rekursionsstruktur wie der Datentyp**:

```
fun F (nil)= nicht-rekursiver Ausdruck
|   F (h::t)= Ausdruck über h und F t


fun prod nil= 1
|   prod (h::t)= h * prod t;
```

Varianten:

```
fun member (nil, m)= false
|   member (h::t,m)= if h = m then true else member (t, m);

fun append (nil, r)= r
|   append (l, nil)= l
|   append (h::t, r)= h :: append (t, r);
```

Abweichung: Alternative 1- oder mehrelementige Liste; (Patternliste ist nicht vollständig!)

```
fun maxl [m] = m
|   maxl (m::n::ns) = if m>n then maxl (m::ns) else maxl (n::ns);
```

Akkumulierender Parameter für Funktionen auf Listen

Akkumulierender Parameter

- führt das bisher berechnete **Zwischenergebnis** mit,
- macht die Berechnung **end-rekursiv**,
- wird mit dem **neutralen Element der Berechnung initialisiert**,
- verknüpft die Listenelemente von **vorne nach hinten**.

```
fun zlength nil = 0
|   zlength (_::t)= 1 + zlength t;

fun alength (nil, a)= a
|   alength (_::t, a)= alength (t, a+1);
```

Beispiel: Nimm die ersten i Elemente einer Liste:

```
fun atake (nil, _, taken) = taken
|   atake (h::t, i, taken) = if i>0 then atake (t, i-1, h::taken)
                                    else taken;
```

Die Partner-Funktion **drop** ist schon end-rekursiv:

```
fun drop (nil, _) = nil
|   drop (h::t, i) = if i>0 then drop (t, i-1) else h::t;
```


Listen aus Listen und Paaren

Liste von Listen konkatenieren:

Signatur: **concat:'a list list -> 'a list**

```
fun  concat nil       = nil
|    concat (x :: xs) = x @ concat xs;
```

Aufwand: Anzahl **::** = Gesamtzahl der Elemente; Rekursionstiefe = Anzahl der Teillisten

Listen von Paaren herstellen: 2-stellige Relation, Zuordnung
überzählige Elemente werden weggelassen. Reihenfolge der Muster ist relevant!

Signatur:**'a list * 'b list -> ('a * 'b) list**

```
fun  zip (x::xs,y::ys) = (x,y) :: zip (xs,ys)
|    zip  _            = nil;
```

Paar-Liste auflösen:

Signatur:**('a * 'b) list -> 'a list * 'b list**

```
fun unzip  nil             = (nil, nil)
|   unzip ((x, y) :: pairs) =
     let val (xs, ys) = unzip pairs in (x :: xs, y :: ys) end;
```

end-rekursiv, Ergebnis in umgekehrter Reihenfolge,mit akkumulierenden Parametern **xs**, **ys**:

```
local   fun  revUnzip (nil, xs, ys) = (xs, ys)
        |    revUnzip ((x, y):: pairs, xs, ys)=
                       revUnzip (pairs, x::xs, y::ys);
in fun iUnzip z = revUnzip (z, nil, nil) end;
```

Liste aller Lösungen am Beispiel: Münzwechsel (1)

geg.: Liste verfügbarer Münzwerte und auszuzahlender Betrag
ges.: Liste von Münzwerten, die den Betrag genau auszahlt

zur Einstimmung:

Greedy-Verfahren mit genau einer Lösung. Es gelte
(*) Liste der verfügbaren Münzwerte ist fallend sortiert. Der kleinste Wert ist 1.
Garantiert Terminierung.

```
fun  change (coinvals, 0)           = []
|    change (c :: coinvals, amount) =
          if amount < c then change (coinvals, amount)
          else c :: change (c :: coinvals, amount - c);
```

einige Münzsysteme:

```
val euro_coins = [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1];
val gb_coins = [50, 20, 10, 5, 2, 1];
val dm_coins = [500, 200, 100, 50, 10, 5, 2, 1];
```

Aufrufe mit Ergebnissen:

```
- change (euro_coins, 489);
> val it = [200, 200, 50, 20, 10, 5, 2, 2] : int list
- change (dm_coins, 489);
> val it = [200, 200, 50, 10, 10, 10, 5, 2, 2] : int list
```


Liste aller Lösungen: Beispiel Münzwechsel (2)

Allgemeines Problem ohne Einschränkung (*); alle Lösungen gesucht
Entwurfstechnik: **Invariante über Parameter**

Signatur: `int list * int list *int  ->int list list`

gezahlte Stücke	verfügbare Münzwerte	Rest-betrag	Liste aller Lösungen

invariant: Wert gezahlter Stücke + Restbetrag = Wert jeder Lösung.
invariant: in gezahlten Stücken sind (`tl` verfügbare Münzwerte) nicht benutzt

Fallunterscheidung für Funktion `allChange`:

Betrag ganz ausgezahlt — eine Lösung

```
coins   _          0       =  [coins]
```

keine Münzwerte mehr verfügbar — keine Lösung

```
coins   []         _       =  []
```

rekursiver Fall:

```
coins   c::coinvals  amount  =
        if amount < 0
```

Betrag so nicht auszahlbar:

```
        then []
```

2 Möglichkeiten verfolgen: c benutzen oder c nicht benutzen

```
        else  allChange (c::coins,c::coinvals,amount-c) @
              allChange (coins, coinvals, amount);
```

Liste aller Lösungen: Beispiel Münzwechsel (3)

Funktion `allChange`:

```
fun allChange (coins, _, 0) = [coins]
|   allChange (coins, [], _)= []
|   allChange (coins, c::coinvals, amount) =
        if amount < 0 then []
        else allChange (c::coins,c::coinvals,amount-c) @
             allChange (coins, coinvals, amount);
```

Aufruf und Liste von Lösungen:

```
- allChange ([], euro_coins, 9);

> val it =
     [  [2, 2, 5], [1, 1, 2, 5], [1, 1, 1, 1, 5],

        [1, 2, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2],
        [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2],

        [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]] : int list list



- allChange ([],[5,2], 3);
> val it = [] : int list list
```


Matrix-Operationen mit Listen: Transponieren

```
fun headcol [] = []
|   headcol ((x::_)::rows)= x :: headcol rows;

fun tailcols [] = []
| tailcols ((_::xs)::rows)= xs :: tailcols rows;

fun transp ([]::_) = []
|   transp rows    =
     headcol rows :: transp (tailcols rows);
```

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Die Fallunterscheidungen sind nicht vollständig (Warnung).
Es wird angenommen, daß alle Zeilen gleich lang sind.

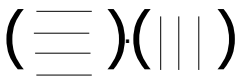
```
val letterMatr = [["a","b","c"],["d","e","f"]];

- transp letterMatr;

> val it = [["a", "d"], ["b", "e"], ["c", "f"]] : string list list
```

Matrix-Operationen mit Listen: Matrix-Multiplikation

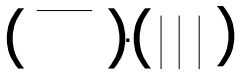
Aufgabe schrittweise zerlegen. Reihenfolge der Funktionen dann umkehren:

```
fun matprod (rowsA, rowsB) =
   rowListprod (rowsA, transp rowsB);
```

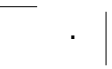
```
fun rowlistprod ([], _) = []
|   rowlistprod (row::rows, cols) =
  rowprod (row,cols) :: rowlistprod (rows,cols);
```



```
fun rowprod (_, []) = []
|   rowprod (row, col::cols) =
   dotprod (row, col) :: rowprod (row, cols);
```



```
fun dotprod ([],[]) = 0.0
|  dotprod (x::xs,y::ys) = x*y + dotprod(xs,ys);
```



Aufruf und Ergebnis:

```
val numMatr = [[1.0,2.0],[3.0,4.0]]; matprod (numMatr, numMatr);
> val it = [[7.0, 10.0], [15.0, 22.0]] : real list list
```


Listenrepräsentation für Polynom-Arithmetik

Polynome in einer Variablen: $a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0$

Datenrepräsentation: **`real list:`** **`[`**a_n**`,...,`** a_1**`,`** a_0**`]`**

besser für dünn besetzte Koeffizientenlisten:

`(int * real) list: [(n,`a_n**`),...,(1,`**a_1**`), (0,`**a_0**`)]`**

mit: $a_i \neq 0$, eindeutig in Potenzen und fallend sortiert

Beispiel: $(x^4 - x + 3) + (x - 5) = (x^4 - 2)$

```
sum ([(4, 1.0), (1, ~1.0), (0, 3.0)], [(1, 1.0), (0, ~5.0)])
```

liefert [(4, 1.0), (0, ~2.0)]

Polynom-Summe:

```
fun  sum ([], us)    = us
|    sum (ts, [])    = ts
|    sum ((m, a)::ts, (n, b)::us) =
```

die höchsten Potenzen sind verschieden (2 Fälle):

```
      if m > n then (m,a)::sum (ts, (n,b)::us)
else if m < n then (n,b)::sum (us, (m,a)::ts)
```

die höchsten Potenzen sind gleich und werden zusammengefasst:

```
else if a+b=0.0 then sum (ts, us)
                else (m,a+b)::sum (ts,us);
```

Polynom-Arithmetik - Halbierungsverfahren

Polynom-Produkt:

termprod multipliziert ein Polynom mit **a*x^m**

```
fun  termprod((m,a), [])       = []
|    termprod((m,a), (n,b)::ts)=
       (m+n, a*b)::termprod ((m,a), ts);
```

Multiplikation zweier Polynome mit Halbierungstechnik:

```
fun  prod ([], us)     = []
|    prod ([(m,a)], us)= termprod ((m,a),us)
|    prod (ts, us)     =
   let val k = length ts div 2
   in sum (prod (List.take(ts,k), us),
           prod (List.drop(ts,k), us))
   end;
```

Ebenso mit Halbierungstechnik:
Polynom-Potenz, Polynom-GGT für Polynom-Division

```
- prod (p1, p2);
> val it = [(5, 1.0), (4, ~5.0), (2, ~1.0), (1, 8.0), (0, ~15.0)] :
  (int * real) list
```