

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 2

Lösung 1: Intensionale und extensionale Definition von Mengen

(a) Verbale Beschreibung und extensionale Definition

- $A := \{i \mid i \in \mathbb{Z} \wedge i^2 < 10\}$

Die Menge aller ganzen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 10 ist.

$$A := \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

- $B := \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge (j + 4) \leq 10 \wedge i = j^2\}$

Die Menge aller Paare natürlicher Zahlen für die folgendens gilt: Die zweite Zahl ist kleiner oder gleich 6 und die erste Zahl ist das Quadrat der zweiten Zahl.

$$B := \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5), (36, 6)\}$$

- $C := \{d \mid d \in \mathbb{N} \wedge d < -1\}$

Die Menge aller natürlicher Zahlen, die kleiner sind als -1, also die leere Menge. $C := \emptyset$

- $D := \{(m, n) \mid m, n \subseteq \{a, b, c, d\} \wedge m \cup n = \{a, b, c, d\} \wedge m \cap n = \{a\}\}$

Die Menge aller Paare disjunkter Zerlegungen der Menge $\{b, c, d\}$, jeweils vereinigt mit $\{a\}$.

$$D := \{(\{a\}, \{a, b, c, d\}), (\{a, b\}, \{a, c, d\}), (\{a, c\}, \{a, b, d\}), (\{a, d\}, \{a, b, c\}), \\ (\{a, b, c\}, \{a, d\}), (\{a, b, d\}, \{a, c\}), (\{a, c, d\}, \{a, b\}), (\{a, b, c, d\}, \{a\})\}$$

(b) Geben Sie intensionale Darstellungen an:

- $E := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

$$E := \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x - 1 \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x < 8\}$$

- $F :=$ die Menge aller geordneten Paare ganzer Zahlen, deren Summe nicht größer als 10 ist.

$$F := \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z} \wedge n + m \leq 10\}$$

- $G :=$ die Menge aller Folgen der Länge 3 der Elemente Kopf und Zahl

$$G := \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}^3$$

- $H :=$ die Menge aller dreielementigen Teilmengen der natürlichen Zahlen von 1 bis 5 $H := \{m \mid m \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \wedge |m| = 3\}$

Lösung 2: Wertebereiche und deren Elemente

(a) Definitionsbereich: $\{\text{Holger}, \text{Susanne}, \text{Jens}, \text{Ingo}, \text{Rainer}\}$

Bildbereich: $\{\text{Fahrrad}, \text{zuFuß}, \text{Bus}\}$

Graph der Funktion:

$$\text{VerkehrsmittelZurUni} := \{(\text{Holger}, \text{Fahrrad}), (\text{Susanne}, \text{zuFuß}), (\text{Jens}, \text{zuFuß}), (\text{Ingo}, \text{Bus}), (\text{Rainer}, \text{Bus})\}$$

(b) Wertebereich: $\text{Pow}(\{\text{Anja}, \text{Holger}, \text{Rainer}\} \times \{\text{Mo}, \text{Di}, \text{Mi}, \text{Do}, \text{Fr}\})$

Beispiel-Element: $\{(\text{Anja}, \text{Di}), (\text{Anja}, \text{Mi}), (\text{Anja}, \text{Do}), (\text{Anja}, \text{Fr}), (\text{Holger}, \text{Mi})\}$

(c) $\text{Essen} := \{e_1, e_2, \dots, e_{15}\}$

$\text{Teilnehmer} := \{t_1, t_2, \dots, t_{330}\}$

$\text{Lieblingsessen} \in \text{Teilnehmer} \rightarrow \text{Essen}$

$$|\text{Teilnehmer} \rightarrow \text{Essen}| = (|\text{Essen}| + 1)^{|\text{Teilnehmer}|} = 16^{330} \text{ (siehe Mod-2.12)}$$

$$\text{Betrachten wir nur die totalen Funktionen: } |\text{Teilnehmer} \rightarrow \text{Essen}| = |\text{Essen}|^{|\text{Teilnehmer}|} = 15^{330}$$

(beide Lösungen werden akzeptiert)

Lösung 3: Relationen und Funktionen

(a) $M := \{a, b, c, d\}$

$$R := \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge (x = y \vee x = a)\} \in \text{Pow}(M \times M)$$

$$R := \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$$

erfüllt: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Gegenbeispiel irreflexiv: $(a, a) \in R$

Gegenbeispiel symmetrisch: $(a, b) \in R, (b, a) \notin R$

Gegenbeispiel asymmetrisch: $(a, a) \in R$

Gegenbeispiel total: weder (b, c) noch $(c, b) \in R$

Gegenbeispiel alternativ: $(b, c), (c, b) \notin R$

(b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = x * (-1)^x$ für alle $x \in \mathbb{N}$

Die Funktion ist total und injektiv.

Begründung nicht surjektiv: Die Funktion bildet nicht auf das Element 1 des Bildbereiches ab. Jede gerade Zahl x des Definitionsbereiches wird auf x abgebildet und jede ungerade Zahl x wird auf $-x$ abgebildet. Es wird also nicht auf die positiven ungeraden und die negativen geraden Zahlen des Bildbereiches abgebildet.

Begründung nicht bijektiv: f ist nicht surjektiv.

(c) Grundlegende Reihenfolgebeschränkungen für eine leckere Pizza

Tomatensauce bereiten VOR Tomatensauce draufgeben

Teig kneten VOR Teig ausrollen

Teig ausrollen VOR Teig aufs Blech legen

Teig aufs Blech legen VOR Tomatensauce draufgeben

Tomatensauce draufgeben VOR Zwiebelringe drauflegen

Zwiebelringe drauflegen VOR Käse drüberstreuen

Käse drüberstreuen VOR in den Ofen schieben

Weil wir eine Ordnungsrelation definieren wollen, kommen dazu alle geordneten Paare, die sich aus der Transitivität ergeben, z.B.:

Tomatensauce bereiten VOR Zwiebelringe drauflegen

Tomatensauce bereiten VOR Käse drüberstreuen

Teig kneten VOR Teig aufs Blech legen

usw.

Diese Ordnung ist nicht total, da sie nicht alle Elemente zueinander in Beziehung setzt. Z.B. gibt es keine VOR-Relation zwischen "Teig kneten" und "Tomatensoße bereiten" oder umgekehrt. Es ist allerdings keine partielle Ordnung (Halbordnung), da die VOR-Relation nicht reflexiv ist, sondern eine *strenge* partielle Ordnung (transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch).

Lösung 4: Bistro

(a) Im Bistro Schlangengarten werden Mittags drei Gerichte angeboten: Essen 1, Essen 2 und ein vegetarisches Gericht. Wenn er möchte kann der Kunde als Getränk Wasser oder Apfelschorle wählen.

$$\text{MAHLZEIT} = \{\text{Essen1}, \text{Essen2}, \text{Vegetarisch}\} \times \{\text{Nichts}, \text{Wasser}, \text{Apfelschorle}\}$$

Ein vegetarisches Gericht ohne Getränk: $(\text{Vegetarisch}, \text{Nichts})$

(b) $\text{PREIS} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_0, y \leq 99\}$

(c) $\text{PREISLISTE} \in (\text{MAHLZEIT} \times \{\text{Studierender}, \text{Mitarbeiter}, \text{Gast}\}) \rightarrow \text{PREIS}$

(d) PREISLISTE ist

nicht injektiv, weil es verschiedene Mahlzeiten gibt, die den gleichen Preis haben.

nicht surjektiv, weil es für niemanden eine Mahlzeit gibt, die zwei Euro kostet.

nicht bijektiv, weil nicht surjektiv bzw. nicht injektiv