Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Übungsblatt 3

Ausgabe: 31.10.2011 — Abgabe: 07.11.2011, 11:15 Uhr, Kasten im D3-Flur.

Aufgabe 1: Direkter Beweis

(Korrekturaufgabe, 3 Punkte)

Blutgruppen werden grob eingeteilt in A, AB, B und 0. TN sei die Menge der Teilnehmer der Vorlesung Modellierung. Wir definieren die folgende Relation

$$GBG = \{(x, y) \mid x, y \in TN,\ x\ und\ y\ haben\ die\ gleiche\ Blutgruppe\}$$

Zeigen Sie: GBG ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 2: Beweis durch Widerspruch

(Korrekturaufgabe, 4 Punkte)

Beweisen Sie durch Widerspruch: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 3: Prüfen eines Beweises

(Korrekturaufgabe, 3 Punkte)

Theorem: Sei $A \subseteq C, B \subseteq C$ und $x \in A$. Dann ist $x \in B$.

Beweis: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann ist $x \notin B$. Da $x \in A$ und $A \subseteq C$ ist, gilt $x \in C$. Da $x \notin B$ und $B \subseteq C$ ist, gilt $x \notin C$. Also gilt $x \in C$ und $x \notin C$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Somit ist die Annahme, das die Behauptung des Theorems falsch ist, ihrerseits falsch und damit die Behauptung korrekt.

(a) Geben Sie die Voraussetzungen und die Behauptung des Theorems an.

(b) Welcher beweistechnische Fehler wurde gemacht?

(c) Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4: Strukturierter Beweis

(Korrekturaufgabe, 4 Punkte)

Theorem: Sei $A \cap B = C$. Wenn $A \cup B = C$ und $B = \emptyset$ ist, dann ist auch $A = \emptyset$.

Beweis: Da $A \cap B = C$ und $B = \emptyset$ ist, ist auch $C = \emptyset$. Da $A \cup B = C$ ist muss auch $A = \emptyset$ sein.

Konstruieren Sie den angegebenen Beweis schrittweise nach dem Schema von Folie Mod-2.59(a-i)!

Aufgabe 5: Induktionsbeweis

(Korrekturaufgabe, 4 Punkte)

Geben Sie Voraussetzung und Behauptung an und beweisen Sie durch Induktion:

Es gibt $\frac{26^{n+1}-1}{25}$ verschiedene Zeichenketten der Länge $\leq n,\ n \in \mathbb{N}_0$ über den 26 Großbuchstaben von A - Z.