Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Übungsblatt 5

Ausgabe: 11.11.2011 — Abgabe: 21.11.2011, 11:15 Uhr, Kasten im D3-Flur.

Aufgabe 1: Abstrakte Algebra **(Korrekturaufgabe, 12 Punkte)**

Gegeben ist die folgende abstrakte Algebra (τ, Σ, Q) mit der Signatur $\Sigma = (S, F)$, die nicht-negative ganze Zahlen und einige Operationen darauf beschreibt.

$$
\begin{array}{lllllll}
S & = & \{ & \text{ZAHL, BOOL} & \} & & \\
F & = & \{ & inc: & \text{ZAHL} & \to \text{ZAHL}, & (F_1) \\
 & & & dec: & \text{ZAHL} & \to \text{ZAHL}, & (F_2) \\
 & & & equal: & \text{ZAHL} \times \text{ZAHL} & \to \text{BOOL}, & (F_3) \\
 & & & zero: & & \to \text{ZAHL} & (F_4) \\
 & & \} & & & &
\end{array}
$$

Für alle Terme x, y der Sorte *ZAHL* gelten die Axiome:

$$
\begin{array}{llll}
Q = & \{ & dec(inc(x)) & \to x, & (Q_1) \\
 & & equal(zero, zero) & \to true, & (Q_2) \\
 & & equal(inc(x), zero) & \to false, & (Q_3) \\
 & & equal(zero, inc(x)) & \to false, & (Q_4) \\
 & & equal(inc(x), inc(y)) & \to equal(x, y) & (Q_5) \\
 & \} & & &
\end{array}
$$

Die definierte Sorte *ZAHL* beschreibt nicht-negative, ganze Zahlen. Die Sorte *BOOL* ist eine Hilfssorte. Wir legen fest, dass die Operationen *inc* und *zero* die einzigen Konstruktoren der Algebra sind.

(a) Definieren Sie präzise: Wann ist ein Term einer Sorte s zu einer Signatur korrekt? Geben je einen korrekten und einen unkorrekten Term zu Σ an. (1 Pkt)

(b) Wann ist ein Term der definierten Sorte einer Algebra in Normalform? Geben Sie zur Sorte *ZAHL* zwei Terme in Normalform an. (1 Pkt)

(c) Wann ist ein Term der definierten Sorte einer Algebra undefiniert? Geben Sie einen undefinierten Term der Sorte *ZAHL* an. (1 Pkt)

(d) Geben Sie an, bei welchen Operationen es sich um Hilfskonstruktoren und bei welchen es sich um Projektionen handelt. (1 Pkt)

(e) Formen Sie die folgenden Terme der Sorte *ZAHL* in Normalform um, sofern dies möglich ist. Geben Sie dabei in jedem Schritt das verwendete Axiom und den resultierenden Term an. (2 Pkt)

(1) $dec(inc(zero))$
(2) $inc(inc(dec(inc(zero))))$
(3) $dec(dec(inc(dec(inc(inc(zero))))))$
(4) $inc(dec(dec(inc(zero))))$

(f) Vereinfachen Sie schrittweise die folgenden Terme, bis Sie den Term *true* oder den Term *false* erhalten. Geben Sie in jedem Schritt das verwendete Axiom und den resultierenden Term an. (2 Pkt)

(1) $equal(dec(inc(zero)), zero)$
(2) $equal(inc(inc(zero)), inc(inc(zero)))$
(3) $equal(inc(inc(zero)), zero)$
(4) $equal(dec(inc(inc(zero))), inc(inc(zero)))$

(g) Erweitern Sie die Menge F um eine Operation $greater(t_1, t_2)$ mit der Ergebnissorte *BOOL* und zwei Operanden t_1, t_2 der Sorte *ZAHL*. Erweitern Sie die Menge Q so um Axiome, dass sich der Term $greater(t_1, t_2)$ genau dann in *true* umformen lässt, wenn t_1 größer ist als t_2. Andernfalls soll sich der Term in *false* umformen lassen. Gehen Sie davon aus, dass t_1 und t_2 nicht undefinierte Terme sind.

Hinweis: Gehen Sie zur Entwicklung der Axiome davon aus, dass die Operation *inc* eine 1 addiert und *dec* eine 1 subtrahiert.

"Erproben" Sie Ihre Axiome, indem Sie schrittweise die folgenden Terme vereinfachen, bis Sie den Term *true* oder den Term *false* erhalten. Geben Sie in jedem Schritt das verwendete Axiom und den resultierenden Term an. (4 Pkt)

(1) $greater(zero, inc(zero))$

(2) $greater(inc(zero), zero)$

(3) $greater(zero, zero)$

(4) $greater(inc(zero), inc(inc(zero)))$

Aufgabe 2: Abstrakte Algebren für Getränkeautomaten (Korrekturaufgabe, 6 Punkte)

Die folgenden abstrakten Algebren modellieren auf verschiedene Weise die Abfolge von Bedienoperationen eines Getränkeautomaten:

(1) Sorten S :={*Getränk*}
Operationen F:
{
Nichts	:		→ *Getränk*,
Tee	:	*Getränk*	→ *Getränk*,
Kaffee	:	*Getränk*	→ *Getränk*,
Kakao	:	*Getränk*	→ *Getränk*

}

Axiome Q: für alle Terme *x* der Sorte *Getränk* gilt
{
Tee(*Tee*(*x*))	→	*Tee*(*x*),
Tee(*Kaffee*(*x*))	→	*Kaffee*(*x*),
Tee(*Kakao*(*x*))	→	*Kakao*(*x*),
Kaffee(*Tee*(*x*))	→	*Tee*(*x*),
Kaffee(*Kaffee*(*x*))	→	*Kaffee*(*x*),
Kaffee(*Kakao*(*x*))	→	*Kakao*(*x*),
Kakao(*Tee*(*x*))	→	*Tee*(*x*),
Kakao(*Kaffee*(*x*))	→	*Kaffee*(*x*),
Kakao(*Kakao*(*x*))	→	*Kakao*(*x*)

}

(2) Sorten S :={*Getränk*, *Auswahl*}
Operationen F:
{
Tee	:		→ *Getränk*,
Kaffee	:		→ *Getränk*,
Kakao	:		→ *Getränk*,
keineAuswahl	:		→ *Auswahl*,
taste	:	*Getränk* × *Auswahl*	→ *Auswahl*

}

Axiome Q: für alle Terme *a*,*b* der Sorte *Getränk* und *c* der Sorte *Auswahl* gilt
{
taste(a, *taste*(b, c)) → *taste*(b, c)
}

(a) Geben Sie für beide abstrakten Algebren je zwei verschiedene Terme der Schachtelungstiefe 3 an.

(b) Beschreiben Sie für beide abstrakten Algebren die Bedeutung der Axiome in Worten wie auf Folie Mod-3.21.

(c) Welche der beiden abstrakten Algebren lässt sich leichter erweitern? Warum?