Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Lösung zum Übungsblatt 5

Lösung 1: Abstrakte Algebra

(a) t ist ein korrekter Term der Sorte $s \in S$, wenn gilt

- $t = v$ und v ist der Name einer Variablen der Sorte s, oder
- $t = f(t_1, t_2, .., t_n)$, also die Anwendung einer n-stelligen Operation $f : s_1 \times s_2 \times ... \times s_n \rightarrow s \in F$ wobei jedes t_i ein korrekter Term der Sorte s_i ist mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, ..., n\}$.

Korrekter Term zu Σ: $zero$

Unkorrekter Term zu Σ: $inc(equal(zero, zero))$

(b) Ein Term der definierten Sorte einer Algebra ist in Normalform, wenn in ihm keine Variablen vorkommen und er nur Konstruktoren enthält.

Zwei Terme der Sorte *ZAHL* in Normalform: $zero$ und $inc(zero)$

(c) Ein Term der definierten Sorte einer Algebra ist undefiniert, wenn man ihn nicht in eine Normalform umformen kann.

Ein undefinierten Term der Sorte *ZAHL*: $dec(zero)$

(d) Die Operationen lassen sich wie folgt klassifizieren:

inc**:** Konstruktor (laut Aufgabenstellung).

dec**:** Hilfskonstruktor, weil dec die Ergebnissorte $ZAHL$ hat aber kein Konstruktor ist (laut Aufgabenstellung).

$equal$**:** Projektion, weil $equal$ die Ergebnissorte $BOOL$ hat.

$zero$**:** Konstruktor (laut Aufgabenstellung).

(e) Umformung in Normalform

(1) $dec(inc(zero))$ (Q_1)
$\rightarrow zero$

(2) $inc(inc(dec(inc(zero))))$ (Q_1)
$\rightarrow inc(inc(zero))$

(3) $dec(dec(inc(dec(inc(inc(zero))))))$ (Q_1)
$\rightarrow dec(dec(inc(inc(zero))))$ (Q_1)
$\rightarrow dec(inc(zero))$ (Q_1)
$\rightarrow zero$

(4) $inc(dec(dec(inc(zero))))$ (Q_1)
$\rightarrow inc(dec(zero))$ Es kann kein Axiom mehr angewendet werden.

(f) Vereinfachung der Terme

(1) $equal(dec(inc(zero)), zero)$ (Q_1)
$\rightarrow equal(zero, zero)$ (Q_2)
$\rightarrow true$

(2) $equal(inc(inc(zero)), inc(inc(zero)))$ (Q_5)
$\rightarrow equal(inc(zero), inc(zero))$ (Q_5)
$\rightarrow equal(zero, zero)$ (Q_2)
$\rightarrow true$

(3) $equal(inc(inc(zero)), zero)$ (Q_3)
$\rightarrow false$

(4) $equal(dec(inc(inc(zero))), inc(inc(zero)))$ (Q_1)
$\rightarrow equal(inc(zero), inc(inc(zero)))$ (Q_5)
$\rightarrow equal(zero, inc(zero))$ (Q_4)
$\rightarrow false$

(g) Die Menge der Funktionen und die Menge der Axiome wird wie folgt erweitert:

$$
\begin{array}{rcllll}
F' & := & F & \cup & \{ & \mathit{greater} : ZAHL \times ZAHL \to BOOL \qquad (F_5) \\
 & & & & \} & \\
Q' & := & Q & \cup & \{ & \mathit{greater}(inc(x), zero) \to \mathit{true}, \qquad (Q_6) \\
 & & & & & \mathit{greater}(zero, x) \to \mathit{false}, \qquad (Q_7) \\
 & & & & & \mathit{greater}(inc(x), inc(y)) \to \mathit{greater}(x, y) \qquad (Q_8) \\
 & & & & \} &
\end{array}
$$

"Erproben" der Axiome:

(1) $greater(zero, inc(zero)) \quad (Q_7)$
$\to \mathit{false}$

(2) $greater(inc(zero), zero) \quad (Q_6)$
$\to \mathit{true}$

(3) $greater(zero, zero) \quad (Q_7)$
$\to \mathit{false}$

(4) $greater(inc(zero), inc(inc(zero))) \quad (Q_8)$
$\to greater(zero), inc(zero)) \quad (Q_7)$
$\to \mathit{false}$

Lösung 2: Abstrakte Algebren für Getränkeautomaten

(a) Zwei Terme der Tiefe 3:

Kakao(*Kaffee*(*Tee*(*Nichts*)))
taste(*Tee*, *taste*(*Kaffee*, emphtaste(*Kakao*, *keineAuswahl*)))

(b) Durch die Axiome beider Algebren wird modelliert, dass jeweils die zuerst getroffene Getränkeauswahl gilt. Weitere Getränkeauswahlen werden ignoriert. Eine Folge von Auswahlen kann also durch die Axiome in die Normalform umgeformt werden, in der genau ein Getränk ausgewählt wird.

(c) Die zweite abstrakte Algebra lässt sich leichter um weitere Getränkesorten erweitern, weil sich die Menge der Axiome dabei nicht ändert. Bei der ersten Algebra müssen bei n Getränkesorten n^2 Axiome angegeben werden.