Prof. Dr. Uwe Kastens
Institut für Informatik, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Universität Paderborn

Modellierung WS 2011/2012 — Übungsblatt 7

Ausgabe: 25.11.2011 — Abgabe: 05.12.2011, 11:15 Uhr, Kasten im D3-Flur.

Aufgabe 1: Prädikatenlogische Aussagen formalisieren (Korrekturaufgabe, 4 Punkte)

(a) Wir vereinbaren folgende Prädikate:

- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Studierender ist.
- $V(x)$ bedeutet, dass x eine Vorlesung ist.
- $BV(s, v)$ bedeutet, dass der Studierende s die Vorlesung v besucht.
- $BK(s, v)$ bedeutet, dass der Studierende s die Klausur zur Vorlesung v besteht.

Formalisieren Sie folgende umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe der gegebenen Prädikate als prädikatenlogische Formeln:

(1) In jeder Vorlesung gibt es einen Studierenden, der die Vorlesung besucht aber die Klausur nicht besteht.
(2) Es gibt zwei Studierende, die genau die gleichen Vorlesungen besuchen.
(3) Jede Vorlesung wird von mindestens zwei Studierenden besucht.
(4) Es gibt Studierende, die bestehen die Klausuren zu allen Vorlesungen, die sie besuchen.

(b) Vereinbaren Sie Prädikate (wie in Teil (a)) um damit anschließend folgende Aussagen zu formalisieren:

(1) Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.
(2) Manche reele Zahl ist eine rationale Zahl.
(3) Nicht jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.
(4) Keine reelle Zahl ist größer als der Eiffelturm.

Aufgabe 2: Syntaktisch korrekte PL-Formeln (Korrekturaufgabe, 3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Formeln auf syntaktische Korrektheit (siehe Folie Mod-4.23). Markieren Sie inkorrekte Stellen in der Formel und begründen Sie die Inkorrektheit.

(a) $P(d) \to \forall a \exists b(\neg R(a, P(b)))$
(b) $\exists x(\forall y(S(y, y)) \vee S(y, x) = y)$
(c) $\forall s(\exists t(P(s) \wedge t(s)))$

Aufgabe 3: Freie und gebundene Variablen (Korrekturaufgabe, 3 Punkte)

Kennzeichnen Sie in den folgenden Formeln die freien und die gebundenen Vorkommen der Variablen wie auf Folie Mod-4.26. Benutzen Sie Pfeile für die freien Vorkommen und verbinden Sie gebundene Vorkommen mit dem zugehörigen Quantor.

(a) $\exists x(P(x, y) \vee \forall y P(x, y))$
(b) $\forall x \exists y(P(x, y)) \wedge \forall x P(x, y)$
(c) $\forall x \forall y((Q(x) \to \exists x(S(x, y, z))) \to R(x, y))$

Aufgabe 4: Interpretation prädikatenlogischer Formeln **(Korrekturaufgabe, 5 Punkte)**

Gegeben seien folgende Zuordnungen für die Interpretationen einer prädikatenlogischen Formel:

- $U := \mathbb{N} \cup Pow(\mathbb{N})$
- $\Im(P) := \{(m, M) | \ m \in \mathbb{N} \wedge M \in Pow(\mathbb{N}) \wedge m \in M\}$
- $\Im(A) := \{1, 2, 5\}$
- $\Im(B) := \{1, 2, 3, 5\}$

Berechnen Sie die Interpretation der prädikatenlogischen Formel

$$\alpha = \forall x \ (P(x, A) \rightarrow P(x, B)).$$

Wichtig: Geben Sie wie auf Folie Mod-4.32 jeden Schritt der Interpretation einzeln an.

Aufgabe 5: Arbeiten mit Interpretationen **(Korrekturaufgabe, 3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die beiden prädikatenlogischen Formeln

$\forall x \exists y \ (P(x, y))$ und $\exists y \forall x \ (P(x, y))$

nicht äquivalent sind. Geben Sie dazu zur Grundmenge $U = \{mo, di, mi\}$ eine Interpretation $\Im(P)$ als Gegenbeispiel an.