Modellierung

Prof. Dr. Uwe Kastens

WS 2011 / 2012

Begründung der Vorlesung

- Das **Modellieren** ist eine für das Fach **Informatik typische Arbeitsmethode**.
- Mit der Modellierung einer **Aufgabe** zeigt man, ob und wie sie **verstanden** wurde.
- Ein zutreffendes Modell ist **Voraussetzung** und Maßstab **für eine systematische Lösung.**
- Als **Ausdrucksmittel** muss man **passende Kalküle und Notationen** anwenden können.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 101

Ziele:

Hinweis auf die Bedeutung der Modellierung

in der Vorlesung:

Kurze Erläuterung der Aussagen.

Ziele

Die Teilnehmer sollen

- einen Überblick über **grundlegende Modellierungsmethoden und -kalküle** bekommen,
- den **konzeptionellen Kern der Kalküle** beherrschen,
- die für die Methoden **typischen Techniken** erlernen und
- Kalküle an **typischen Beispielen** anwenden.

Insgesamt sollen sie lernen,

- Aufgaben **präzise** zu analysieren und zu beschreiben,
- **formale Kalküle als Arbeitsmittel** einzusetzen und
- den **praktischen Wert von präzisen Beschreibungen** erkennen.

siehe **Beschreibung des Moduls I.2.1 im Modulhandbuch**:
http://www.cs.uni-paderborn.de/studium/studiengaenge/pruefungswesen/modulhandbuch.html

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 102

Ziele:
Ziele der Vorlesung verstehen

in der Vorlesung:
Begründung der Ziele

Durchführung

Zu jedem **Modellierungskalkül** soll(en)

- mit einigen typischen kleinen **Beispielen motivierend** hingeführt werden,
- der **konzeptionelle Kern** des Kalküls vorgestellt werden,
- **Anwendungstechniken und Einsatzgebiete** an Beispielen gezeigt und in den Übungen erfahren werden,
- an einem **durchgehenden Beispiel** größere Zusammenhänge gelernt werden,
- auf **weiterführende Aspekte** des Kalküls, seine Rolle in Informatikgebieten und -vorlesungen sowie auf algorithmische Lösungsverfahren **nur verwiesen** werden,

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 103

Ziele:

Ausrichtung der Vorlesung

in der Vorlesung:

- Hier: Einführung und Anwendung der Kalküle,
- in anderen Vorlesungen werden sie vertieft.

Inhalt

Thema	Semesterwoche	Kap. im Buch „Modellierung“
1. Einführung	1	1
2. Grundlegende Strukturen		
Wertebereiche	2	2
Beweistechniken	3	4.3
3. Terme, Algebren	4, 5	3
4. Logik		
Aussagenlogik	6	4.1
Verifikation von Algorithmen	7	-
Prädikatenlogik	8	4.2
5. Graphen	9, 10	5
Verbindung, Zuordnung, Anordnung		
6. Modellierung von Strukturen		
Kontextfreie Grammatiken,	11	6.1
XML		6.2
Entity-Relationship Modell	12	6.3
UML Klassendiagrame		6.4
7. Modellierung von Abläufen		
Endliche Automaten,	13	7.1
Petri-Netze	14	7.2
8. Projekte, Zusammenfassung	15	8

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 104

Ziele:

Überblick über den Inhalt bekommen

in der Vorlesung:

Die Struktur wird erläutert.

Verständnisfragen:

- Welche der Begriffe sind Ihnen schon begegnet?
- Was stellen sie sich darunter vor?

Literaturhinweise

Elektronisches Vorlesungsmaterial:

- **U. Kastens: Vorlesung Modellierung WS 2011 / 2012 http://ag-kastens.uni-paderborn.de/lehre/material/model**

Das Buch zur Vorlesung:

- **Uwe Kastens, Hans Kleine Büning: Modellierung - Grundlagen und formale Methoden, 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, 2008**

Weitere Bücher zum Nachlernen und Nachschlagen:

- **Gerhard Goos: Vorlesungen über Informatik, Band 1, 3. Auflage, Springer-Lehrbuch, 2000**
- **Thierry Scheurer: Foundations of Computing, System Development with Set Theory and Logic, Addison-Wesley, 1994**
- **Daniel J. Velleman: How To Prove It - A Structured Approach, 2nd ed., Cambridge University Press, 2006**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 105

Ziele:

Literatur zur Vorlesung kennenlernen

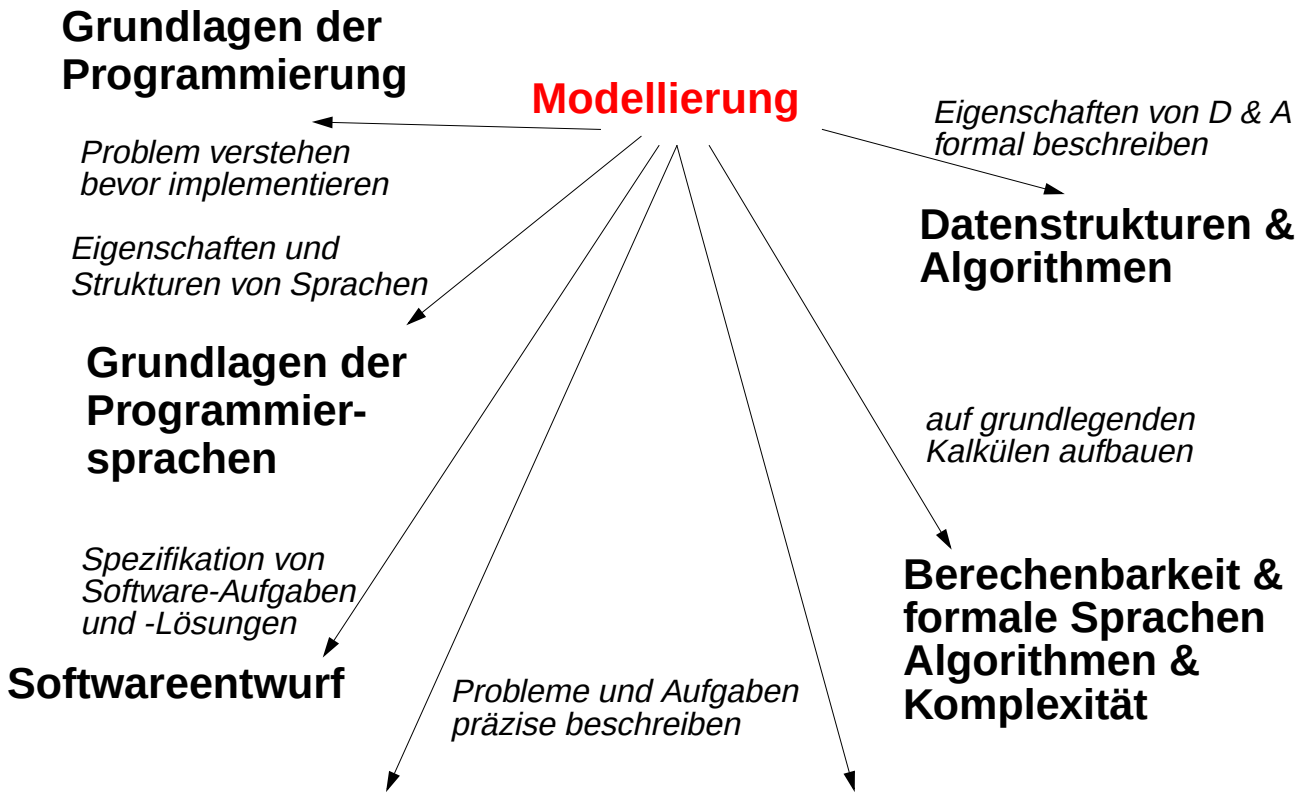
in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu.

Verständnisfragen:

- Suchen Sie das Buch "Modellierung" im Semesterapparat.
- Verfolgen Sie die URLs.

Bezüge zu anderen Vorlesungen



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 106

Ziele:

Einordnung der Vorlesung

in der Vorlesung:

- Vorlesungen im Studienplan zeigen.
- Bezüge erläutern.

Verständnisfragen:

- Finden Sie den Studienplan im WWW.
- Können Sie die Bezüge an den Inhaltsbeschreibungen der Vorlesungen nachvollziehen?

Elektronisches Skript: Startseite

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 107

Ziele:
Das elektronische Skript kennenlernen.

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Verständnisfragen:
- Suchen Sie das Skript im WWW.

Elektronisches Skript: Termine

Termine

Vorlesung

- Mo, 11:15 - 12:45, Hörsaal L 2
- Fr, 11:15 - 12:45, Hörsaal L 1

Beginn: 10. Okt 2011
Ende: 3. Feb 2012

Zentralübung

- Mo, 13:00 - 13:45, Hörsaal L 2

Beginn: 24. Okt 2011
Ende: 30. Jan. 2012

Übungen

vorläufige Liste, übernommen aus dem Vorlesungsverzeichnis:

- Übung 01 Mo 14:00 N 3 206

...

- Übung 18 Fr 14:00 N 3 206

Beginn: Mo 17. Okt. 2011
Ende: Fr 3. Feb. 2012

Klausurtermine

Es wird zwei Klausurtermine nach Ende der Vorlesungszeit geben. Ort, Beginn und die Anmeldezeit wird das ZPS festlegen

In der Klausur sind nur die folgenden Hilfsmittel erlaubt:

- Ein **beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt**. Das Blatt muss **persönlich von Hand** beschrieben sein. Es sind also insbesondere **keine Ausdrucke oder Kopien** erlaubt. Auf dem Blatt muss die **Matrikelnummer und der Name** stehen. Wer ein solches Blatt in der Klausur nutzt, muss es **mit der Klausur abgeben**. Bei der Klausureinsicht kann das Blatt wieder abgeholt werden.
- Studierende, deren Muttersprache nicht deutsch ist, dürfen außerdem in der Klausur ein **fremdsprachiges Wörterbuch ohne handschriftliche Eintragungen** benutzen.

Weitere Wiederholungen der Klausur findet erst nach dem nächsten Wintersemester statt und werden mit möglicher Weise anderen Modalitäten von einem anderen Dozenten durchgeführt. **Bonuspunkte werden dorthin NICHT übertragen.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 108

Ziele:

Organisation der Vorlesung kennenlernen

in der Vorlesung:

Organisatorisches erläutern

Regeln

Übungen:

Es werden 4-stündige Übungen angeboten. Darin werden Aufgaben zum Vorlesungsstoff **unter Anleitung gelöst**.

Hausübungen:

Es wird in jeder Woche ein **Hausübungszettel** ausgegeben (freitags). Abgabe der Lösungen am übernächsten Montag. Bearbeitung in **Gruppen** (2-4). Lösungen werden korrigiert, bewertet und zurückgegeben.

Kurztests:

Es werden voraussichtlich 4 Kurztests (ca. 20 min) während der Zentralübung geschrieben korrigiert, bewertet und zurückgegeben.

Bonus:

Durch **Vorrechnen** in den Übungen, Punkte aus den **Hausübungen** und den **Kurztests** kann ein Bonus erworben werden.
Damit kann die Note einer bestandenen Klausur um 1 oder 2 Notenschritte verbessert werden, z.B. von 2,3 auf 2,0 oder von 3,0 auf 2,3.

Details der Regeln findet man auf der **Organisationsseite**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 109

Ziele:

Organisation der Vorlesung kennenlernen

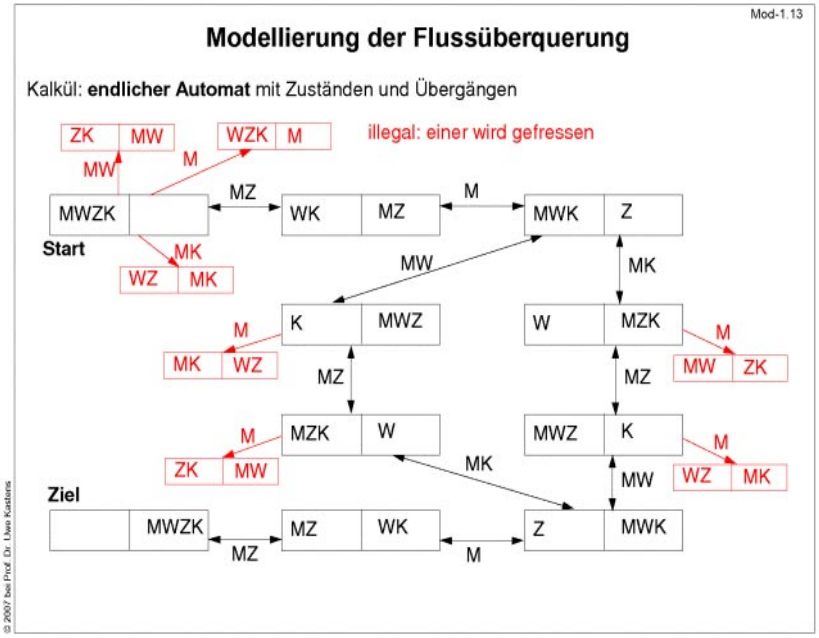
in der Vorlesung:

Organisatorisches erläutern:

- Anmeldung zu Übungen,
- Bearbeitung der Hausaufgaben,
- Klausuren

Elektronisches Skript: kommentierte Folien

Modellierung WS 2007/2008 - Folie 113



Autor: Prof. Dr. Uwe Kastens

Generiert mit Camelot | Probleme mit Camelot? | Geändert am: 01.10.2007

Ziele:
Prozess der Modellierung am Beispiel erkennen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu (siehe auch nächste Folie):

- Bedeutung der Graphik und der Symbole,
- Zustände und Übergänge eines endlichen Automaten (siehe Kap. 8),
- Darstellung als Graph mit Knoten und Kanten (siehe Kap. 6)
- Wertebereiche der Information zu Zuständen (siehe Kap. 2)

Verständnisfragen:

- Prüfen Sie, ob das Modell die Aufgabe korrekt und vollständig beschreibt.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 111

Ziele:

Arbeitshinweise zu den Folien kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Beispiel: Die Flussüberquerung

Aufgabe:

Ein Mann steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses, den er überqueren will. Er hat ein Boot, das groß genug ist, ihn und ein weiteres Objekt zu transportieren, so dass er immer nur eins der drei mit sich hinübernehmen kann.

Falls der Mann allerdings den Wolf und die Ziege oder die Ziege und den Kohlkopf unbewacht an einem Ufer zurücklässt, so wird einer gefressen werden.

Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Ziege oder der Kohlkopf gefressen werden?

Quelle: Hopcroft, Ullman: Einführung in die Automatentheorie, formale Sprachen und Komplexitätstheorie, S. 14, 15

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 112

Ziele:

Modellierung am Beispiel kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu der Aufgabe, Skizze.

Verständnisfragen:

- Welche Aspekte der Aufgabe sind für die Lösung wichtig?
- Welche sind unwichtig?
- Wie können wir die wichtigen Aspekte präzise beschreiben?

Beispiel: Die Flussüberquerung

Aufgabe:

Ein Mann steht mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf am linken Ufer eines Flusses, den er überqueren will. Er hat ein Boot, das groß genug ist, ihn und ein weiteres Objekt zu transportieren, so dass er immer nur eins der drei mit sich hinübernehmen kann.

Falls der Mann allerdings den Wolf und die Ziege oder die Ziege und den Kohlkopf unbewacht an einem Ufer zurücklässt, so wird einer gefressen werden.

Ist es möglich, den Fluss zu überqueren, ohne dass die Ziege oder der Kohlkopf gefressen werden?

Quelle: Hopcroft, Ullman: Einführung in die Automatentheorie, formale Sprachen und Komplexitätstheorie, S. 14, 15

Erste Analyse: evtl. wichtige

- **Objekte**: Mann, Wolf, Ziege, Kohlkopf, Ufer (links u. rechts), Fluss, Boot
- **Eigenschaften, Beziehungen**: unbewacht an einem Ufer, Wolf frisst Ziege, Ziege frisst Kohl, Boot trägt Mann + 1 Objekt
- **Tätigkeiten**: Fluss überqueren, Objekt transportieren

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 112a

Ziele:

Modellierung am Beispiel kennenlernen

in der Vorlesung:

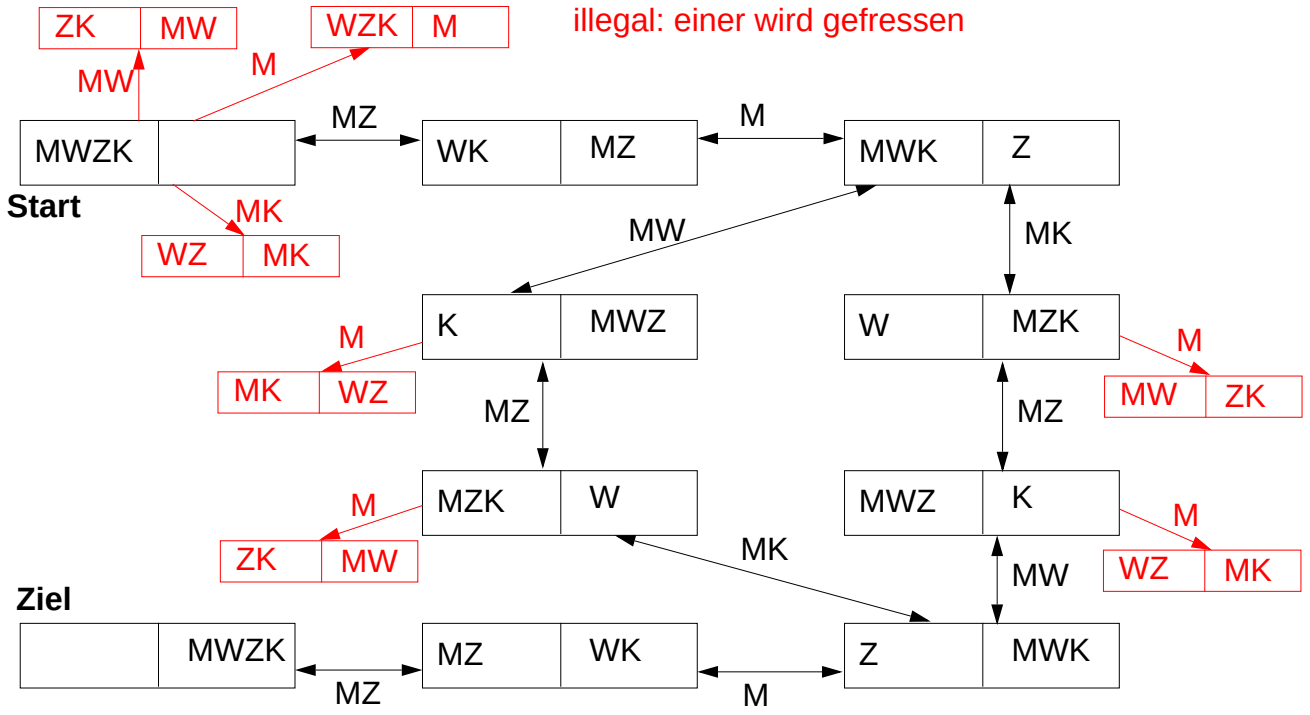
Erläuterungen zu der Aufgabe, Skizze.

Verständnisfragen:

- Welche Aspekte der Aufgabe sind für die Lösung wichtig?
- Welche sind unwichtig?
- Wie können wir die wichtigen Aspekte präzise beschreiben?

Modellierung der Flussüberquerung

Kalkül: **endlicher Automat** mit Zuständen und Übergängen



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 113

Ziele:

Prozess der Modellierung am Beispiel erkennen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu (siehe auch nächste Folie):

- Bedeutung der Graphik und der Symbole,
- Zustände und Übergänge eines endlichen Automaten (siehe Kap. 8),
- Darstellung als Graph mit Knoten und Kanten (siehe Kap. 6)
- Wertebereiche der Information zu Zuständen (siehe Kap. 2)

Verständnisfragen:

- Prüfen Sie, ob das Modell die Aufgabe korrekt und vollständig beschreibt.

Diskussion des Modellierungsbeispiels

- Modellierung von **Abläufen**, Folgen von Schritten: Kalkül endlicher Automat
- **Abstraktion**: nur die Zustände und Übergänge interessieren
- **relevante Objekte benannt**: M, W, Z, K
- jeder **Zustand** wird charakterisiert durch ein **Paar von Mengen** der Objekte, (linkes Ufer, rechtes Ufer); jedes Objekt kommt genau einmal vor
- zulässige und **unzulässige Zustände**
- **Übergänge** werden mit den transportierten Objekten beschriftet

Besonders wichtig ist, was **nicht modelliert** wurde, da es **für die Aufgabe irrelevant** ist!
z. B. die Länge des Bootes, die Breite und Tiefe des Flusses, usw.

Kreative Leistung:

- Kalkül „endlicher Automat“ wählen, Bedeutung der Zustände und Übergänge festlegen

systematische Tätigkeit:

- speziellen Automat aufstellen, Lösungsweg finden

Meist kann man Lösungen am Modell entwickeln.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 114

Ziele:

Prozess der Modellierung am Beispiel erkennen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu (siehe auch vorige Folie):

- In jedem Kalkül: Namen und Wertebereich für die relevanten Dinge, Irrelevantes weglassen.
- Es gibt auch ernsthafte Aufgaben nach diesem Muster: Finden Zulässiger Folgen von Zustandsübergängen!

Verständnisfragen:

- Wie würden sie eine ähnliche Aufgabe modellieren, in der die beiden Tiere nicht hungrig sind aber das Boot nur begrenzte Tragfähigkeit hat?

Modellierungsbeispiel: Getränkeautomat

Die **Bedienung eines Getränkeautomaten** soll modelliert werden. Das Gerät soll Getränke wie Kaffee, Tee, Kakao gegen **Bezahlung mit Münzen** abgeben. Man soll **Varianten der Getränke** wählen können, z. B. mit oder ohne Milch oder Zucker. Die Modellierung soll berücksichtigen, dass im Gerät nur **begrenzte Vorräte** untergebracht werden können.

Im Rahmen der **Übungen** werden **präzisere Beschreibungen** der Bedienung und der Funktionen des Getränkeautomaten entwickelt.

Im Laufe des Semesters werden wir die jeweils gelernten **Kalküle zur Modellierung des Getränkeautomaten anwenden**. Daran werden wir erkennen, welche Kalküle sich für welche Aspekte gut eignen.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 114a

Ziele:

Semesterprojekt kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zur Durchführung und zum Zweck des Beispiels:

- Modellierung im Zusammenhang üben.
- Stärken und Schwächen der Kalküle im Vergleich kennenlernen.
- Aufgabe ist absichtlich unscharf formuliert: Das ist real und gibt Raum zur Augestaltung.
- Präzisierung von Aufgaben üben.
- Modellierung verschiedener Aspekte trennen.

Allgemeiner Modellbegriff

- **Abbild** eines vorhandenen Originals (z. B. Schiffsmodell)
- **Vorbild** für ein herzustellendes Original (Gebäude in kleinem Maßstab; Vorbild in der Kunst)
- **konkretes** oder **abstraktes Modell** (Schiffsmodell, Rentenmodell)
- konkretes oder abstraktes **Original** (Schiff, Bevölkerungsentwicklung)

davon abweichende Bedeutungen:

- Fotomodell: führt Mode (oder sich) vor
- Automodell: Typreihe
- in der Logik: Eine Struktur S ist ein Modell der Formeln F, wenn alle F für S gelten.

hier in der Informatik:

- **abstraktes Abbild oder Vorbild zu abstrakten oder konkreten Originalen**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 115

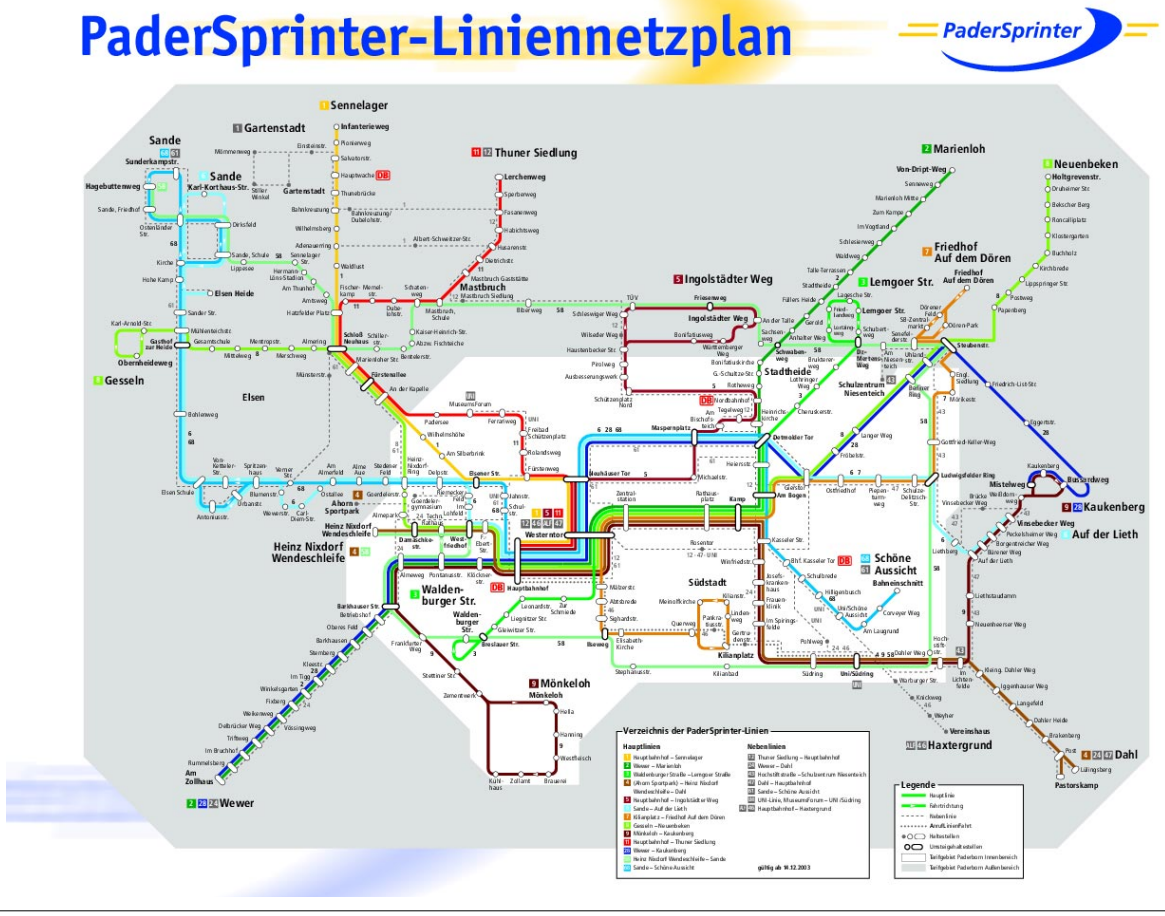
Ziele:
Begriff fixieren

in der Vorlesung:
Erläuterungen und weitere Beispiele dazu

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Beispiele zu den Aspekten.
- Schlagen Sie den Begriff Modell in allgemeinen Lexika und in Lexika der Informatik nach.

Modell: Buslinienplan



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 115a

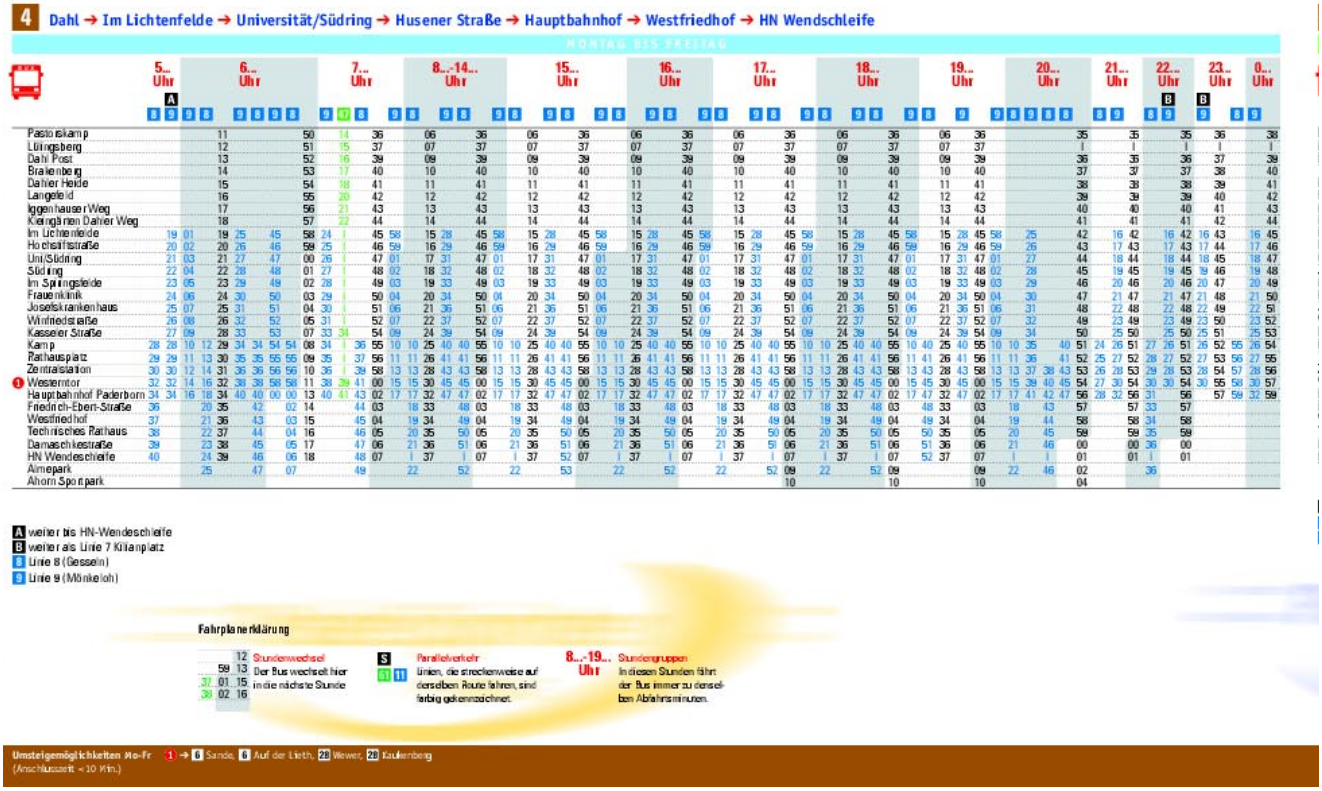
Ziele:

Beispiel für Modell aus dem Alltag

in der Vorlesung:

Abstraktion erläutern

Modell: Busfahrplan



4 Dahl → Im Lichtenfelde → Universität/Südring → Husener Straße → Hauptbahnhof → Westfriedhof → HN Wendschleife

MONTAG BIS FREITAG

	5... Uhr	6... Uhr	7... Uhr	8...-14... Uhr	15... Uhr	16... Uhr	17... Uhr	18... Uhr	19... Uhr	20... Uhr	21... Uhr	22... Uhr	23... Uhr	0... Uhr
Pastoriskamp		11 50	14 36	06 36	06 36	06 36	06 36	06 36	06 36	35	35	35	36	38
Lüngsberg		12 51	15 37	07 37	07 37	07 37	07 37	07 37	07 37					
Dahl Post		13 52	16 39	09 39	09 39	09 39	09 39	09 39	09 39	36	35	36	37	39
Brakenberg		14 53	17 40	10 40	10 40	10 40	10 40	10 40	10 40	37	37	37	38	40
Dahler Heide		15 54	18 41	11 41	11 41	11 41	11 41	11 41	11 41	38	38	38	39	41
Langefeld		16 55	20 42	12 42	12 42	12 42	12 42	12 42	12 42	39	39	39	40	42
Iggenhauser Weg		17 56	21 43	13 43	13 43	13 43	13 43	13 43	13 43	40	40	40	41	43
Kleingärten Dahler Weg		18 57	22 44	14 44	14 44	14 44	14 44	14 44	14 44	41	41	41	42	44
Im Lichtenfelde	19 01	19 25 45 58	24 I	45 58	15 28 45 58	15 28 45 58	15 28 45 58	15 28 45 58	15 28 45 58	25	42	16 42	16 43	16 45
Hochstiftstraße	20 02	20 26 46 59	25 I	46 59	16 29 46 59	16 29 46 59	16 29 46 59	16 29 46 59	16 29 46 59	26	43	17 43	17 44	17 46
Uni/Südring	21 03	21 27 47 00	26 I	47 01	17 31 47 01	17 31 47 01	17 31 47 01	17 31 47 01	17 31 47 01	27	44	18 44	18 45	18 47
Südring	22 04	22 28 48 01	27 I	48 02	18 32 48 02	18 32 48 02	18 32 48 02	18 32 48 02	18 32 48 02	28	45	19 45	19 46	19 48
Im Springsfelde	23 05	23 29 49 02	28 I	49 03	19 33 49 03	19 33 49 03	19 33 49 03	19 33 49 03	19 33 49 03	29	46	20 46	20 47	20 49
Frauenklinik	24 06	24 30 50 03	29 I	50 04	20 34 50 04	20 34 50 04	20 34 50 04	20 34 50 04	20 34 50 04	30	47	21 47	21 48	21 50
Josefskrankenhaus	25 07	25 31 51 04	30 I	51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	31	48	22 48	22 49	22 51
Winfriedstraße	26 08	26 32 52 05	31 I	52 07	22 37 52 07	22 37 52 07	22 37 52 07	22 37 52 07	22 37 52 07	32	49	23 49	23 50	23 52
Kasseler Straße	27 09	28 33 53 07	33 34	54 09	24 39 54 09	24 39 54 09	24 39 54 09	24 39 54 09	24 39 54 09	34	50	25 50	25 51	25 53
Kamp	28 28 10 12	29 34 34 54 54 08	34 I 36	55 10 10 25 40 40 55	10 10 25 40 40 55	10 10 25 40 40 55	10 10 25 40 40 55	10 10 25 40 40 55	10 10 25 40 40 55	10 10 35 40	51 24 26 51	27 26 51	26 52 55	26 54
Rathausplatz	29 29 11 13	30 35 35 55 55 09	35 I 37	56 11 11 26 41 41 56	11 11 26 41 41 56	11 11 26 41 41 56	11 11 26 41 41 56	11 11 26 41 41 56	11 11 26 41 41 56	11 11 36 41	52 25 27 52	28 27 52	27 53 56	27 55
Zentralisation	30 30 12 14	31 36 36 56 56 10	36 I 38	58 13 13 28 43 43 58	13 13 28 43 43 58	13 13 28 43 43 58	13 13 28 43 43 58	13 13 28 43 43 58	13 13 28 43 43 58	13 13 37 38 43	53 26 28 53	29 28 53	28 54 57	28 56
1 Westernitor	32 32 14 16	32 38 38 58 58 11	38 39 41	00 15 15 30 45 45 00	15 15 30 45 45 00	15 15 30 45 45 00	15 15 30 45 45 00	15 15 30 45 45 00	15 15 30 45 45 00	15 15 39 40 45	54 27 30 54	30 30 54	30 55 58	30 57
Hauptbahnhof Paderborn	34 34 16 18	34 40 40 00 00 13	40 41 43	02 17 17 32 47 47 02	17 17 32 47 47 02	17 17 32 47 47 02	17 17 32 47 47 02	17 17 32 47 47 02	17 17 32 47 47 02	17 17 41 42 47	56 28 32 56	31 56	57 58	32 59
Friedrich-Ebert-Straße	36	20 35 42 02 14	44 03	18 33 48 03	18 33 48 03	18 33 48 03	18 33 48 03	18 33 48 03	18 33 48 03	18 43	57	57 33	57	
Westfriedhof	37	21 36 43 03 15	45 04	19 34 49 04	19 34 49 04	19 34 49 04	19 34 49 04	19 34 49 04	19 34 49 04	19 44	58	58 34	58	
Technisches Rathaus	38	22 37 44 04 16	46 05	20 35 50 05	20 35 50 05	20 35 50 05	20 35 50 05	20 35 50 05	20 35 50 05	20 45	59	59 35	59	
Damaschkestraße	39	23 38 45 05 17	47 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 36 51 06	21 46	00	00 36	00	
HN Wendeschleife	40	24 39 46 06 18	48 07	I 37 I 07	I 37 52 07	I 37 I 07	I 37 I 07	I 37 I 07	I 37 52 07	I I	01	01 I	01	
Aimepark		25 47 07	49	22 52	22 53	22 52	22 52 09	22 52 09	09	22 46	02	36		
Ahorn Sportpark							10	10	10		04			

A weiter bis HN-Wendeschleife
B weiter als Linie 7 Kilianplatz
8 Linie 8 (Gessein)
9 Linie 9 (Mönkeloh)

Fahrplanerklärung

12 59 13 37 01 15 38 02 16 — Stundenwechsel: Der Bus wechselt hier in die nächste Stunde

S 11 11 — Parallelverkehr: Linien, die streckenweise auf derselben Route fahren, sind farbig gekennzeichnet.

8...-19... Uhr — Stundengruppen: In diesen Stunden fährt der Bus immer zu denselben Abfahrtsminuten.

Umsteigemöglichkeiten Mo-Fr (Anschlusszeit < 10 Min.): 1 → 6 Sande, 6 Auf der Lieth, 20 Wewer, 28 Kaufenberg

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 115b

Ziele:

Beispiel für Modell aus dem Alltag

in der Vorlesung:

Abstraktion erläutern

Modellbegriff im allgemeinen Lexikon

Modell [italien., zu lat. modulus „Maß, Maßstab"], allg. Muster, Vorbild, Entwurf.
▷ Mensch (auch Tier), der (das) als Vorbild für künstler. Studien oder Kunstwerke dient („sitzt").
▷ in der *Bildhauerei* meist in verkleinerter Form ausgeführter Entwurf einer Plastik oder Tonarbeit, die in Bronze gegossen werden soll. – ↑Architekturmodell.
▷ in der *Modebranche* Bez. für 1. ein nur einmal oder in eng begrenzter Anzahl hergestelltes Kleidungsstück

▷ im *Sprachgebrauch verschiedener Wiss.* (Philosophie, Naturwiss., Soziologie, Psychologie, Wirtschaftswiss., Politikwiss., Kybernetik u. a.) ein Objekt materieller oder ideeller (Gedanken-M.) Natur, das von einem Subjekt auf der Grundlage einer Struktur-, Funktions- oder Verhaltensanalogie für ein anderes Objekt *(Original)* eingesetzt und genutzt wird, um Aufgaben zu lösen, deren Durchführung unmittelbar am Original selbst nicht möglich bzw. zu aufwendig ist (z. B. Flugzeug-M. im Windkanal). Die **Modellmethode** vollzieht sich in vier Schritten: 1. Auswahl (Herstellung) eines dem [geplanten] Original entsprechenden M.; 2. Bearbeitung des M., um neue Informationen über das M. zu gewinnen (**Modellversuch;** ↑Ähnlichkeitsgesetze); 3. Schluß auf Informationen über das Original (meist Analogieschluß); ggf. 4. Durchführung der Aufgabe am Original. Infolge der Relationen zw. Subjekt, Original und M. **(Modellsystem)** ist ein M. einsetzbar u. a. zur Gewinnung neuer Informationen über das Original (z. B. Atom-M.), zur Demonstration und Erklärung (z. B. Planetarium), zur Optimierung des Originals (z. B. Netzplan), zur Überprüfung einer Hypothese oder einer techn. Konstruktion (z. B. Laborversuch). – Abweichend von diesem M.begriff versteht die *mathemat. Logik* unter M. eine Interpretation eines Axiomensystems, bei der alle Axiome dieses Systems wahre Aussagen darstellen. Diese **Modelltheorie** liefert grundlegende Verfahren zur Behandlung von Fragen der Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Definierbarkeit.

Wissenschaften einschließlich Informatik

mathematische Logik

aus
Meyers Neues Lexikon, in zehn Bänden,
Meyers Lexikonverlag, 1993

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 115e

Ziele:

Modellbegriff einordnen

in der Vorlesung:

Hinweis auf Aspekte

- in der Informatik,
- in anderen Wissenschaften,
- außerhalb von Wissenschaften.

Verständnisfragen:

Schlagen Sie den Begriff Modell und verwandte Begriffe in anderen Lexika nach.

Modellbegriff im Lexikon der Informatik

Modell → *Gegenstandsraum*

Modell (allgemeiner Begriff)

Teilgebiet: Modellierung
model (in general)

Während wir in den Formalwissenschaften wie Mathematik oder Physik einen präzisen Gebrauch des Wortes „Modell" (→ *Gegenstandsraum*) vorfinden, wird das Modell-Denken in den Sozialwissenschaften weitgehend durch einen vagen Gebrauch des Ausdrucks „Modell" gekennzeichnet. Folgende Begriffe, die sich in ihrer Intention oft stark unterscheiden, dürften die gebräuchlichsten Verwendungsweisen sein:

1. *Modell in der mathematischen Logik*
2. Modell als Bezeichnung für Theorien schlechthin
3. Modell als Resultat der Abbildung der Wirklichkeit.

Weitere Klassifizierungskriterien (→ *Klassifizierung*[2]) lassen sich nach dem Zweck, der mit den einzelnen Modellen verfolgt wird angeben (siehe Abb. S. 512).

Modell als Theorie schlechthin (2) findet sich häufig im verbalen Sprachgebrauch der Sozialwissenschaften. Insbesondere jene Teilklassen von Theorien, die mathematisiert, quantifiziert bzw. formalisiert sind, werden allgemein als Modell bezeichnet. Beispiele sind Preismodell, Rentenmodell.

Modelle als Abbild der Realität (3) stellen eine umfangreiche, sehr heterogene Klasse dar. Hierbei bilden die Beschreibungen ohne Verwendung einer Sprache, meist auf ein handliches Maß verkleinerten Nachbildungen eines vorgestellten Originals, die bekannteste Art von Modellen. Diese werden, wie z.B. der Globus, auch als ikonische oder materiale Modelle bezeichnet. *Stübel*

Modell in der mathematischen Logik

Teilgebiet: Logik
model

Es gibt zwei unterschiedliche Definitionen für Modelle der mathematischen *Logik*:

a) Eine Struktur Σ heißt Modell einer Formelmenge X, wenn jede Formel aus X in Σ gültig ist.
b) Das Paar (I,ζ), bestehend aus einer Interpretation I und einer *Belegung* ζ, heißt Modell einer Formelmenge X, wenn jede Formel aus X bei I und ζ wahr ist.

Für Mengen X von Aussagen, also Formeln ohne freie Variablen, sind beide Definitionen gleichwertig, da dann die Belegung keine Rolle spielt.

Die Modelltheorie beschäftigt sich mit gegenseitigen Beziehungen zwischen Aussagen formalisierter Theorien und mathematischen Strukturen, in denen die Aussagen gelten. *Müller; Stübel*

Modell, abstrakt symbolisches

Teilgebiet: Modellierung
abstract symbolic model

Eine vor allem in der Betriebswirtschaft sehr verbreitete Klasse von Modellen bilden die abstrakt symbolischen Abbilder eines Realitätskomplexes. Dabei kann es sich sowohl um rein verbale Reproduktionen eines Systems handeln als auch um ein künstliches Sprachsystem, das durch zunächst inhaltsleere symbolische Zeichen und syntaktische (→ *Syntax von Programmiersprachen*) Regeln gekennzeichnet ist. *Stübel*

aus
H-J. Schneider: Lexikon der Informatik und Datenverarbeitung, 3. Aufl., Oldenbourg Verlag, 1991

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 115f

Ziele:

2 unterschiedliche Bedeutungen in der Informatik

in der Vorlesung:

Erläuterung der beiden Varianten

Verständnisfragen:

Schlagen Sie den Begriff Modell und verwandte Begriffe in anderen Lexika der Informatik nach.

Zweck des Modells

Der **Verwendungszweck** bestimmt die Art des Modells! z. B.

- Gebäudemodell: optischer Eindruck
- Grundriss: Einteilung des Grundstückes und der Räume
- Kostenplan: Finanzierung
- Gewerkeplan: Bauabwicklung

Nur was **für den Zweck relevant** ist, wird modelliert!

Vollständige Modellierung des Originals ist nicht sinnvoll.

Für den Zweck die jeweils passende Modellierungsmethode (Kalkül) verwenden!

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 116

Ziele:
Bedeutung des Verwendungszweckes erkennen

in der Vorlesung:
Erläuterungen zu den Zwecken und Modellierungsmethoden.

Verständnisfragen:
- Was sind die Modellierungsmethoden in den angegebenen Beispielen?
- Geben Sie weitere Kalküle an und Zwecke für die sie sich eignen.

Arbeiten mit dem Modell

- **Operationen, die man am Original nicht durchführen kann**
  z. B. neue Flügelform im Windkanal oder in der Computer-Simulation erproben
- Bestimmte Aspekte eines **komplexen Gebildes untersuchen und verstehen**,
  z. B. Geschäftsabläufe in einer Firma
- **Verständigung zwischen Auftraggeber und Hersteller** des Originals,
  z. B. Hausbau, Software-Konstruktion
- Fixieren von **Anforderungen für die Herstellung** des Originals,
  Software: Requirements, Spezifikation

Modell validieren:

Nachweisen, dass die
relevanten Eigenschaften des Originals korrekt und vollständig im Modell erfasst sind und darüber Einvernehmen herstellen.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 117

Ziele:

Modellieren heißt verstehen!

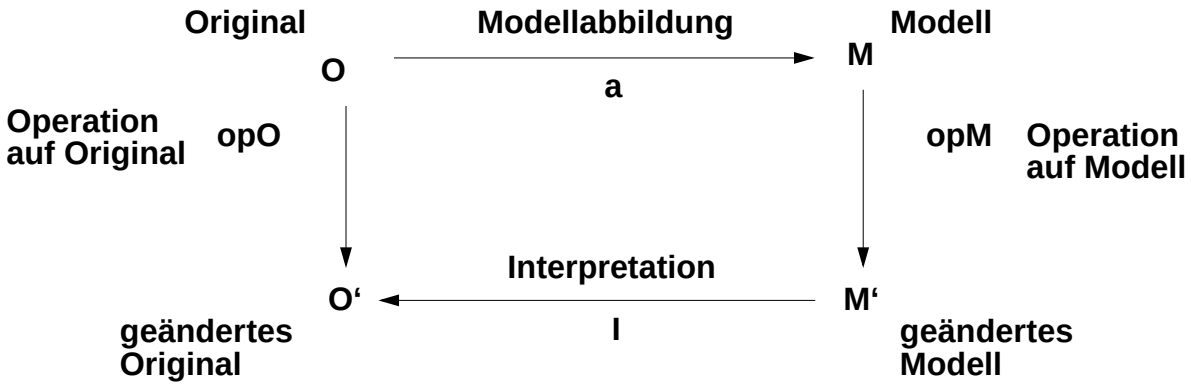
in der Vorlesung:

- Modellieren zum eigenen Verständnis,
- Modell zur Abstimmung mit anderen
- Modell untersuchen, wenn Original nicht verfügbar.
- Beispiele zur Validierung

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Beispiele zur Validierung von Modellen.

Bezug zwischen Original und Modell



Für alle relevanten Operationen muss das Diagramm kommutieren, d. h

opO (O) = I (opM (a (O)))

Die Operation auf dem Original entspricht der Interpretation der Operation auf dem Modell.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 118

Ziele:

Formale Anforderung an das Modell

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Modellierte Aspekte

Ein Modell beschreibt nur bestimmte Aspekte des Originals und seiner Teile:

- **Struktur**, Zusammensetzung des Originals (z. B. Organisationsschema einer Firma)
- **Eigenschaften** von Teilen des Originals (z. B. Farbe und Wert einer Spielkarte)
- **Beziehungen** zwischen Teilen des Originals
  (z. B. Abhängigkeiten der Gewerke beim Hausbau)
- **Verhalten** des Originals unter Operationen (z. B. Zugfolge bei der Flussüberquerung)

Zur Modellierung bestimmter Aspekte eignen sich bestimmte Methoden und Kalküle:

- **Struktur**: Wertebereiche, Entity-Relationship, KFG, Klassifikation, Typen
- **Eigenschaften**: Logik, Relationen
- **Beziehungen**: Graphen, Relationen, Logik, Entity-Relationship
- **Verhalten**: endliche Automaten, Petri-Netze, Algebren, Graphen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 119

Ziele:

Einteilung der modellierten Aspekte

in der Vorlesung:

- Verschiedene Sichten auf das Original.
- Der Zweck bestimmt die passende Sicht.
- Zuordnung zu den Kalkülen der Vorlesung.

Verständnisfragen:

- Diskutieren Sie die Sichten am Beispiel **eines** Originals.

Deklarative oder operationale Beschreibung

Deklarative Beschreibung des Modells
macht Aussagen über Aspekte des Originals.

Operationale Beschreibung des Modells
gibt an, wie sich das Original unter bestimmten Operationen verhält.

Beispiel Balkenwaage:

deklarativ:
Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn sich die Gewichte umgekehrt proportional zu den Längen der Balken verhalten: x * a = y * b.

operational:
Erst lege ich auf den Balken der Länge a ein Gewicht x; dann lege ich auf den Balken der Länge b ein Gewicht y = x * a / b; danach ist dieWaage wieder im Gleichgewicht.

deklarativ:
Aussagen meist allgemein gültig,
auf die Aufgabe bezogen,
ohne redundante Abläufe

operational:
häufig nur Beispiele, unvollständig,
legt eine Lösung nahe (fest),
erzwingt Nachvollziehen von Abläufen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 120

Ziele:

Möglichst deklarativ beschreiben.

in der Vorlesung:

Diskussion von Beispielen.

2 Modellierung mit Wertebereichen

In der Modellierung von Systemen, Aufgaben, Lösungen kommen
Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, **aus welchem Wertebereich sie stammen**,
aber noch offen gelassen, welchen Wert sie haben.
Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welche ist die höchste?

Die Beschreibung des Modells wird präzisiert durch **Angabe der Wertebereiche**,
aus denen die Objekte, Konstanten, Werte von Variablen, Eingaben, Ausgaben,
Lösungen, usw. stammen.

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**
Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel: Modellierung von Kartenspielen

Wertebereich	**einige Elemente daraus**
KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass} KartenArten := {Kreuz, Pik, Herz, Karo}	8 Dame Pik
Karten := KartenArten × KartenSymbole Menge aller Paare aus KartenArten und KartenSymbole	(Kreuz, 8) (Herz, Dame)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 201

Ziele:

Beschreibung von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- präzise Angabe von Wertebereichen,
- Informationsgehalt untersuchen

Verständnisfragen:

Karten eines Kartenspieles werden auf 2 Spieler verteilt. Beschreiben Sie den Wertebereich einer solchen Verteilung in Worten.

Übersicht über Begriffe

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**

Grundlegender Kalkül: **Mengenlehre** (halbformal);
Mengen und Mengenoperationen

Strukturen über Mengen zur Bildung **zusammengesetzter Wertebereiche**

- Potenzmengen
- kartesische Produkte, Tupel
- Folgen
- Relationen
- Funktionen
- disjunkte Vereinigungen

Verwendung des Kalküls:

Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen

Grundlage für alle anderen formalen Kalküle

abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 202

Ziele:

Übersicht zu diesem Abschnitt

in der Vorlesung:

Rolle der Mengen und Strukturen darüber;
Hinweise auf Bezüge zu

- anderen Kalkülen,
- Datentypen in Programmiersprachen

Einführendes Beispiel

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 203

Ziele:

Definition von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Aufgabe
- Präzise Modellierung interessiert hier - nicht Verfahren, um Lösungen zu finden.
- Modellierung auf der nächsten Folie

Wertebereiche für das Beispiel

Beschreibung	**formale Angaben**
Menge der Nationen	Nationen := {A, B, C}
Indexmenge zur Unterscheidung der Delegierten	Ind := {1, 2, 3, 4}
ein Delegierter modelliert durch ein **Paar**	(a, i) mit a ∈ Nationen, i ∈ Ind
Wertebereich der Delegierten	Delegierte := Nationen × Ind
Wertebereich der Arbeitsgruppen	
3-Tupel, kartesischesProdukt	AGn := {(A, i) | i ∈ Ind} × {(B, j) | j ∈ Ind} × {(C, k) | k ∈ Ind}
Wertebereich für **Teilmengen** von Sprachen	SprachMengen := Pow (Nationen) Pow (M) ist die **Potenzmenge** von M
Eine **Funktion** Sp gibt an, welche Sprachen ein Delegierter spricht:	Sp ∈ DSpricht
Wertebereich solcher Funktionen	DSpricht := Delegierte -> SprachMengen
Wertebereich der gemeinsamen Sprachen einer AG	
Wertebereich	AGSpricht := AGn -> SprachMengen
GemSp ist eine Funktion daraus	GemSp ∈ AGSpricht

N := M bedeutet „**Der Name N ist definiert als M**“.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 204

Ziele:

Beispiele im Zusammenhang sehen

in der Vorlesung:

- Vorschau auf Anwendung des Kalküls,
- informelle Erläuterungen,
- Werte aus den Wertebereichen angeben

Verständnisfragen:

- Geben Sie zu jedem der Wertebereiche einen konkreten Wert als Beispiel an.

2.1 Mengen

Menge: Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge M.
a ist Element aus M wird notiert $a \in M$.

Definition von Mengen durch

- **Aufzählen der Elemente (extensional)**: M := {1, 4, 9, 16, 25}
- **Angabe einer Bedingung (intensional)**: $M := \{ a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$
  allgemein: M := { a | P (a) }
  wobei P (a) eine Aussage über a ist, die wahr oder falsch sein kann.

Mengen können **endlich** (z. B. {1, 4, 9, 16, 25}) oder
nicht-endlich sein (z. B. $\{ a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl} \}$)

Die **leere Menge** wird { } oder ∅ geschrieben.

Die **Anzahl der Elemente** einer Menge M heißt die **Kardinalität** von M,
geschrieben $|M|$ oder Card(M)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205

Ziele:

Definition von Mengen verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele zu den Eigenschaften.
- Hier informelle Definition des Mengenbegriffs; axiomatische Mengenlehre definiert ihn strenger.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele jeweils für unterschiedliche intensionale und für unterschiedliche extensionale Definitionen derselben Menge.
- Vergleichen Sie den Mengenbegriff mit dem aus Mathe I.
- Geben Sie Mengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften von Mengen

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- **Alle Elemente einer Menge sind verschieden.**
- **Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet.**
- **Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen notiert werden:**

{ 1, 2, 3, 4 } { i | i∈ ℕ, 0 < i < 5 } { 1, 1, 2, 2, 3, 4 } { 2, 4, 1, 3 }

Mengen können aus **atomaren oder zusammengesetzten** Elementen gebildet werden,
z. B. nur atomare Elemente: { 1, 2, 3, 4 } { rot, gelb, blau } { Kreuz, Pik, Herz, Karo } { 1 }
Menge von Paaren: { (Pik, 10), (Herz, Dame) }
Menge von Mengen: { {rot, blau}, {blau}, ∅ } { ∅ }

Die **Existenz von atomaren Objekten** des jeweiligen Modellierungsbereiches wird vorausgesetzt, z. B. die natürlichen Zahlen, Arten und Werte von Spielkarten.

Eine Menge kann auch **verschiedenartige Elemente** enthalten,
z. B. {1, (Pik, 10), rot, 9}
aber **nicht bei der Modellierung mit Wertebereichen:** hier sollen alle Elemente eines Wertebereiches gleichartig sein.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205a

Ziele:

Definition von Mengen verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele zu den Eigenschaften.
- Hier informelle Definition des Mengenbegriffs; axiomatische Mengenlehre definiert ihn strenger.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele jeweils für unterschiedliche intensionale und für unterschiedliche extensionale Definitionen derselben Menge.
- Vergleichen Sie den Mengenbegriff mit dem aus Mathe I.
- Geben Sie Mengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Russels Paradoxon

Man muss prinzipiell entscheiden können, ob ein Wert a **Element einer Menge** M ist, „a ∈ M?“

Russels Paradoxon:

> Sei P die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten,
> also P := { x | x ∉ x}.
>
> Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum **Widerspruch**.

Um solche Anomalien auszuschließen, geben wir in **intensionalen Mengendefinitionen** an, aus welchem größeren, **schon definierten Wertebereich** die Elemente stammen:

M := {a | a ∈ ℕ, a ist Quadratzahl und a ≤ 30}

hier also „a ∈ ℕ“.

Damit tatsächlich entschieden werden kann, **welche Elemente M enthält**, muss die Bedingung über a (hier „a ist Quadratzahl und a ≤ 30“) **entscheidbar** sein.

Diese Einschränkungen schließen nicht aus, Mengen **rekursiv zu definieren**, z. B.

Sonnensystem := {Sonne} ∪
{ x | x ∈ Himmelskörper, x umkreist y, y ∈ Sonnensystem }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205r

Ziele:

Intensionale Definitionen können widersprülich sein

in der Vorlesung:

- Paradoxon erläutern.
- Beispiel: "Der Barbier rasiert alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren." Ist er Element dieser Menge?

Mengenoperationen

Teilmenge von	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
echte Teilmenge von	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M$ oder $x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M$ und $x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M$ und $x \notin N\}$

M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \varnothing$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 206

Ziele:

Vorstellung der Mengenoperatoren

in der Vorlesung:

- Hinweis auf algebraische Gesetze; werden hier nicht vertieft

Verständnisfragen:

- Schlagen Sie die algebraischen Gesetze der Mengenoperatoren nach.

2.2 Potenzmengen

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U, geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U).
Pow (U) := {M | M $\subseteq$ U}

Kardinalität: $|\text{Pow}(U)| = 2^{|U|}$ wenn $|U| = n$

Beispiele:

Grundmenge U_1 := {a, b} Potenzmenge Pow (U_1) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}

Grundmenge U_2 := {1, 2, 3} Pow (U_2) = { ∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3} }

Wenn die **Werte Teilmengen von U** sind, ist ihr **Wertebereich die Potenzmenge von U**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 207

Ziele:

Potenzmenge als Wertebereich verstehen

in der Vorlesung:

- Kardinalität begründen
- Beispiele,
- Wert - Wertebereich; Menge - Potenzmenge
- Aufgabe mit Lösungsmenge

Verständnisfragen:

- Begründen sie die Kardinalitätsformel.
- Geben Sie Potenzmengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Modellierung mit Potenzmengen

Beispiel 2.1: Wertebereich der Sprachen, die ein Delegierter spricht
SprachMengen := Pow (Nationen), {A, B} ∈ SprachMengen

Modellierungstechnik: Menge von Lösungen statt einer Lösung
Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen fragen.
Der Wertebereich der Antwort ist die **Potenzmenge** des Wertebereiches der Lösungen.

Vergleiche auch **Mengentyp** in Pascal:

```
type Sprachen = set of {A, B, C};
var spricht: Sprachen;
spricht := {A, B};
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 207a

Ziele:

Potenzmenge als Wertebereich verstehen

in der Vorlesung:

- Kardinalität begründen
- Beispiele,
- Wert - Wertebereich; Menge - Potenzmenge
- Aufgabe mit Lösungsmenge

Verständnisfragen:

- Begründen sie die Kardinalitätsformel.
- Geben Sie Potenzmengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.3 Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt der Mengen M und N:
Menge **aller geordneten Paare** mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N

$$M \times N := \{z \mid z = (x, y) \text{ und } x \in M \text{ und } y \in N\}$$

oder kürzer $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

Enthält **alle Kombinationen** von Werten aus M und N.
Falls $M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$, ist $M \times N = \emptyset$.

z. B. Delegierte := Nation $\times$ Ind = { (A, 1), (A, 2),..., (B, 1), (B, 2), ... }

Verallgemeinert zu **n-Tupeln** (n>1, geordnet):

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I\}$ mit $I := \{1, \ldots, n\}$ und $n > 1$

z. B. Daten := Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre, $(24, 10, 2011) \in$ Daten

Folgende Wertebereiche sind verschieden. Ihre Elemente haben **unterschiedliche Struktur**:

$(a, b, c) \in A \times B \times C$ $\quad$ $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$

Notation bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = \mathbf{M^n}$ mit $n > 1$

Beispiel:

Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Kardinalität: $|M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n| = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1,..., n\}$ mit $n > 1$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208

Ziele:

Zusammengesetzte Wertebereiche verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ordnung der Komponenten ist wichtig.
- Beispiel für geschachtelte Tupel

Verständnisfragen:

- Was ist der Unterschied zwischen Nation x Ind x SprachMengen und (Nation x Ind) x SprachMengen?
- Welches ist besser im Sinne von Beispiel 2.1?
- Geben Sie kartesische Produkte an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.4 Disjunkte Vereinigung

Die allgemeine **disjunkte Vereinigung** fasst n Wertebereiche (Mengen) A_1, A_2, ...A_i, ..., A_n zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammen, wobei $i \in I := \{1, ..., n\}$.
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (engl. tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Anwendungsmuster:
V ist ein allgemeinerer Wertebereich, er abstrahiert von den spezielleren A_i

Beispiele:

Geschäftspartner := { (Kunde, Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, Unity),
(Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)} mit
Kunden := {Siemens, Benteler, Unity} Lieferanten := {Orga, Siemens}
Ind := {Kunde, Lieferant}

Buchstaben := {a, b, ..., z} Ziffern := {0, 1, ..., 9} Ind := {Buchstabe, Ziffer}

Zeichen = { (Buchstabe, b) | b ∈ Buchstaben} ∪ { (Ziffer, z) | z ∈ Ziffern}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208a

Ziele:

Kennzeichnung von Werten

in der Vorlesung:

- Rolle des Kennzeichenfeldes
- Klassifikation von Wertebereichen
- Vergleich mit Varianten-Records in Pascal

Verständnisfragen:

Geben Sie Wertebereiche mit disjunkten Vereinigungen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.5 Folgen

Endliche Folgen von Elementen aus A:

Sei $\mathbf{A^0} := \{ \varepsilon \}$ die Menge, die **nur die leere Folge** über A, ε **bzw. (),** enthält,
$\mathbf{A^1} := \{ (a) \mid a \in A\}$ die Menge **einelementiger Folgen** über A,
$\mathbf{A^n}$ mit $n > 1$ die Menge der **n-Tupel** über A,

dann ist $\mathbf{A^+} := \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i \geq 1 \}$
die Menge der **nicht-leeren Folgen** beliebiger Länge über A

und $\mathbf{A^*} := A^+ \cup A^0$ die Menge von Folgen über A,
die **auch die leere Folge** enthält.

Folgen notieren wir wie Tupel, d. h. $(a_1, ..., a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$; $() \in A^*$

Beispiele:

$(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$
$(m, o, d, e, l, l) \in \text{Buchstaben}^+$
neueAufträge := Auftrag^*
gezogeneKarten := Karten*

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208b

Ziele:

Folgen gleichartiger Elemente

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- 1-Tupel und 0-Tupel sind auf Folie Mod2.8 nicht als kartesische Produkte definiert. Deshalb werden hier leere und einelementige Folgen definiert.
- + und * Notation erläutern
- weitere Beispiele
- Verwendung der leeren Folge

Verständnisfragen:

- Aus einer Folge natürlicher Zahlen sollen die geraden Zahlen gestrichen werden. Aus welchem Wertebereich stammt das Ergebnis?
- Geben Sie Folgen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.6 Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.
n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ mit $n > 1$

R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Wertebereich von R: $R \in \text{Pow}(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)$

Eine **1-stellige Relation** R über einer Menge M ist eine Teilmenge von M,
also $R \in \text{Pow}(M)$.

Eine Relation R definiert eine **Aussage über Tupel**.
Wir sagen auch: „Eine Relation R gilt für die Tupel, die R enthält."

Beispiele:

Relation $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Element daraus: $(27, 42) \in \leq$ also gilt $27 \leq 42$

NationenKleiner := {(A, C), (C, B), (A, B)} $\subseteq$ Nationen^2

Menüs22-10 := {(Lauchsuppe, Putenbraten, Eisbecher),
(Lauchsuppe, Kalbsteak, Ananas), (Salat, Omelett, Ananas)}

Menüs22-10 $\subseteq$ Vorspeisen $\times$ Hauptgerichte $\times$ Desserts mit

Vorspeisen := {Lauchsuppe, Salat, ...};
Hauptgerichte := {Putenbraten, Kalbsteak, Omelett, ...}
Desserts := {Eisbecher, Ananas, Schokoladenpudding, ...}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 209

Ziele:

Allgemeine Relationen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Zusammenhang zwischen Relationen und Aussagen über Tupel.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele für Relationen zwischen Werten aus unterschiedlichen Wertebereichen.
- Geben Sie Relationen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Kardinalität, Schreibweisen

Der **Wertebereich Pow ($\mathbf{M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n}$)** hat die **Kardinalität**

$|\mathbf{Pow\ (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)}| = 2^{\prod_{i \in I} |\mathbf{M_i}|}$, falls alle $\mathbf{M_i}$ endlich sind.

d.h. es gibt $2^{\prod_{i \in I} |\mathbf{M_i}|}$ verschiedene Relationen in dem Wertebereich.

Intensionale Definition einer Relation:

$$\text{GültigeDaten} \subseteq \text{Daten} = \text{Tage} \times \text{Monate} \times \text{Jahre}$$

$$\begin{aligned}\text{GültigeDaten} := \{ (t, m, j) \mid t, m, j \in \mathbb{N},\ m \leq 12,\\ (m \in \{1,3,5,7,8,10,12\} \wedge t \leq 31) \vee\\ (m \in \{4,6,9,11\} \wedge t \leq 30) \vee\\ (m = 2 \wedge t \leq 29 \wedge \text{Schaltjahr}(j)) \vee\\ (m = 2 \wedge t \leq 28 \wedge \neg\, \text{Schaltjahr}(j))\}\end{aligned}$$

$(24, 10, 2011), (29, 2, 2012) \in \text{GültigeDaten}, \quad (31, 4, 2010) \notin \text{GültigeDaten}$

alternative Schreibweisen für Elemente aus Relationen:

$R(a)$ für $a \in R$, z. B. GültigeDaten(24, 10, 2011)

bei 2-stelligen Relationen auch mit Operatoren:

$x\ R\ y$ für $(x, y) \in R$, z. B. $x \leq y$, $a \neq b$, $p \rightarrow q$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 209a

Ziele:

Allgemeine Relationen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Zusammenhang zwischen Relationen und Aussagen über Tupel.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele für Relationen zwischen Werten aus unterschiedlichen Wertebereichen.
- Geben Sie Relationen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ mit $M \neq \emptyset$ sind folgende Begriffe definiert:

- **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$;
- **irreflexiv**, wenn für kein $x \in M$ gilt: $x\ R\ x$;
- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$;
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ folgt $x = y$;
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt, $y\ R\ x$ gilt nicht;
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ folgt $x\ R\ z$;
- **total**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$;

Hinweise zum Anwenden der Definitionen (genauer in Kap. 4.1, 4.2):

1. „**x R y**“ bedeutet „**(x, y)** $\in$ **R**“
2. **„**für alle $x \in M$ gilt ...“: der **gesamte Wertebereich M** muss geprüft werden
3. „für alle $x, y \in M$ gilt ...“: alle Paare von Werten aus M prüfen, auch solche mit x = y
4. „A **oder** B“ ist wahr, wenn **mindestens eins von beiden wahr** ist
5. „**aus A folgt B**“ ist gleichwertig zu „**(nicht A) oder B**“.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210

Ziele:

Definitionen verstehen und einprägen

in der Vorlesung:

- Die Form der Definitionen wird erläutert.
- Das Prüfen der Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} erläutert.
- Im Buch "Modellierung" ist auf den Seiten 36 und 37 die Eigenschaft "alternative Relation" falsch definiert, bzw. erklärt. Zur Korrektur ersetze man in den Definitionen 2.10 und 2.12 sowie in der Tabelle auf Seite 37 oben den Begriff "alternativ" durch "total".

Verständnisfragen:

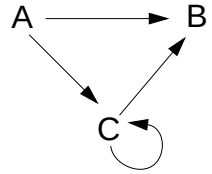
- Konstruieren Sie zu jeder Eigenschaft eine Relation R über M = {A, B, C}, die die Eigenschaft nicht erfüllt. Beschreiben Sie R in Worten.

Beispiele für Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Eigenschaft ist	sei M = { A, B, C } z.B. erfüllt von R = ...	z.B. nicht erfüllt von R = ...
reflexiv	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B)}	{(A,A), (B,C)}
irreflexiv	{(A,B)}	{(A,A)}
symmetrisch	{(A,B), (B,A), (C,C)}	{(A,B)}
antisymmetrisch	{(A,B), (C,C)}	{(A,B), (B,A)}
asymmetrisch	{(A,B), (C,A)}	{(A,B), (B,A)} oder {(C,C)}
transitiv	{(A,B), (B,C), (A,C)}	{(A,B), (B,C)}
total	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B), (B,C), (A,C), (C,B)}	{(A,A), (A,B), (A,C)}

{(A,B), (A,C), (C,B), (C,C)}

als gerichteter Graph:
(siehe Kap. 5)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210a

Ziele:

Eigenschaften am Beispiel prüfen

in der Vorlesung:

Einige Beispiele werden erläutert.

Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ ist eine

- **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Quasiordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **totale** oder **lineare Ordnung**, wenn R eine totale Halbordnung ist, also total, (reflexiv,) antisymmetrisch und transitiv;
- **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Aussagen zu diesen Definitionen

1. Alle solche Ordnungsrelationen sind transitiv.
2. Ist R eine totale Ordnung, dann ist R auch eine Halbordnung und eine Quasiordnung.
3. Nur für totale Ordnungen wird gefordert, dass alle Elemente aus M „vergleichbar“ sind (total).
4. Enthält R „Zyklen über verschiedene Elemente“, z.B. (a, b), (b, a) $\in$ R mit a $\neq$b, dann ist R weder eine Halbordnung, strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210c

Ziele:

Definition der Ordnungsrelationen verstehen

in der Vorlesung:

- Die Definitionen werden erläutert.
- Die Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} sowie an < und <= über N geprüft erläutert.

Verständnisfragen:

- Beschreiben Sie den Unterschied zwischen Halbordnung und totaler Ordnung. Geben Sie ein Beispiel dazu an.

Beispiele für Ordnungsrelationen

sei M = {A, B, C},
eq_M := {(A,B), (B,A), (A,A), (B,B), (C,C)}
$<_M$:= {(A,B), (B,C), (A,C)},
$\leq_M$:= {(A,B), (B,C), (A,C), (A,A), (B,B), (C,C)}

$\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad < \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

	$<_M$	$\leq_M$	eq_M	$<$	$\leq$
reflexiv	**-**	**+**	**+**	**-**	**+**
irreflexiv	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
symmetrisch	**-**	**-**	**+**	**-**	**-**
antisymmetrisch	**+**	**+**	**-**	**+**	**+**
asymmetrisch	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
transitiv	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**
total	**-**	**+**	**-**	**-**	**+**
	strenge Ordnung	**totale**	**Äquivalenz**	**strenge**	**totale**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210d

Ziele:

Beispiele für Ordnungsrelationen

in der Vorlesung:

Die Beispiele werden erläutert.

2.7 Funktionen

Eine **Funktion f ist eine 2-stellige Relation f** $\subseteq$ **D** $\times$ **B** mit folgender Eigenschaft:
Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$, d. h. zu einem $x \in D$ gibt es höchstens ein Bild y.

D ist der **Definitionsbereich** von f; B ist der **Bildbereich** von f
D und B können beliebige, auch zusammengesetzte Wertebereiche sein.

Der **Wertebereich D -> B** ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B** $\subseteq$ **Pow (D** $\times$ **B).**
D -> B enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über **D** $\times$ **B**, die Funktionen sind.

Statt **f** $\in$ **D -> B** sagt man auch **f hat die Signatur D -> B** oder kurz **f: D -> B**

Schreibweisen für $(x, y) \in f$ auch $y = f(x)$ oder $f(x) = y$ oder $x\ f\ y$

Die Menge aller Paare $(x, y) \in f$ heißt **Graph von f**.

Eine Funktion $f \in D \rightarrow B$ heißt
n-stellig, wenn der Definitionsbereich D ein Wertebereich von n-Tupeln ist, $n > 1$;
1-stellig, wenn D nicht als kartesisches Produkt strukturiert ist und nicht leer ist.

Man spricht auch von **0-stelligen Funktionen**, wenn D der **leere Wertebereich** ist;
0-stellige Funktionen sind **konstante Funktionen** für jeweils einen **festen Wert b = f()**;
man kann sie allerdings nicht als Menge von Paaren angeben.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 211

Ziele:

Grundbegriffe von Funktionen verstehen

in der Vorlesung:

- Begriffe an Beispielen erläutern
- unterscheiden: Funktion, ihre Definition, der Wertebereich, aus dem sie stammt

Achtung! unterschiedliche Verwendung von Begriffen:

- hier: Der **Wertebereich D -> B** ist die Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden.
- hier: Die Funktion f: D -> B hat den **Bildbereich B**.
- Mathe I: Der **Wertebereich einer Funktion f: D -> B ist B**
- Goos: Der Bildbereich einer Funktion f: D -> B ist **Bild(f) = B** . (Werde ich hier nicht verwenden.)
- Mathe I: Das **Bild von f** ist die Menge der Werte, auf die f abbildet.

Verständnisfragen:

Geben Sie Funktionen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Beispiele für Funktionen

Funktion	aus dem Wertebereich
not := {(w, f), (f, w)}	Bool -> Bool
id := {(w,w), (f, f)}	Bool -> Bool
oder := {((w,w),w), ((w,f),w), ((f,w),w), ((f,f),f)}	Bool × Bool -> Bool
Quadrat := {(a, b) | a, b ∈ ℕ und b = a*a}	ℕ -> ℕ
ggt := {((a,b),c) | a, b, c ∈ ℕ und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und b}	ℕ × ℕ -> ℕ
Sp := {((A, 1), {A,B}), ((B, 2), {B})}	Delegierte -> SprachMengen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 211b

Ziele:

Beispiele zu Funktionen

in der Vorlesung:

Beispiele erläutern

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion **f : D -> B** heißt

- **total**, wenn es für jedes x ∈ D ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **partiell**, wenn nicht verlangt wird, dass f für alle x ∈ D definiert ist,
- **surjektiv**, wenn es zu jedem y ∈ B ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **injektiv**, wenn es zu jedem y ∈ B höchstens ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen | D -> B | = (| B |+1)$^{|D|}$

Anzahl der totalen Funktionen in | D -> B | ist | B |$^{|D|}$

... falls D und B endlich sind.

Anzahl der Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen mit dieser Signatur
z. B. |{A, B, C} -> {w, f}| = 3^3 = 27 insgesamt; 2^3= 8 totale Funktionen in |{A, B, C} -> {w, f}|

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 212

Ziele:
Begriffe einprägen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

- Begriffe erläutern
- Graphiken dazu
- Kardinalität begründen

Verständnisfragen:

- Charakterisieren Sie die Eigenschaften graphisch.

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion

$\mathbf{id_M}$: M -> M mit $id_{\mathbf{M}} := \{ (x, x) \mid x \in M \}$

Charakteristische Funktion $\chi_{\mathbf{M}}$ einer Menge $M \subseteq U$, mit der Trägermenge U
gibt für jedes Element der Trägermenge U an, ob es in M enthalten ist:

$\chi_{\mathbf{M}} : U \to Bool$ mit $\chi_{\mathbf{M}} := \{ (x, b) \mid x \in U \text{ und } b = (x \in M)\}$
$\chi_{\mathbf{M}}$ ist eine totale Funktion

Funktionen mit dem Bildbereich Bool heißen **Prädikate**.
z. B. <= : $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \to Bool$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213

Ziele:

Spezielle Anwendungsmuster

in der Vorlesung:

- Zusammenhang zu Relationen erläutern.
- Beispiele für charakteristische Funktionen und Multimengen angeben.

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Anwendungen für solche Funktionen an.

Funktionen zur Modellierung von mehrfachen Vorkommen

In sogenannte **Multimengen (engl. bags)** können einige Werte mehrfach vorkommen. Es ist relevant, wieoft jeder Wert vorkommt.

Das **mehrfache Vorkommen** von Werten in einer Multimenge modellieren wir mit einer Funktion:

b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt, z. B.

geldBeutel $\in$ EUMünzen -> $\mathbb{N}_0$ mit

geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (20, 4), (50, 1), (100, 3), (200, 2)}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213a

Ziele:

Spezielle Anwendungsmuster

in der Vorlesung:

- Zusammenhang zu Relationen erläutern.
- Beispiele für charakteristische Funktionen und Multimengen angeben.

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Anwendungen für solche Funktionen an.

Funktionen auf Indexmengen

Indexmengen dienen zur Unterscheidung von Objekten des Modellbereiches
z. B. Ind = {1, ..., n}, KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

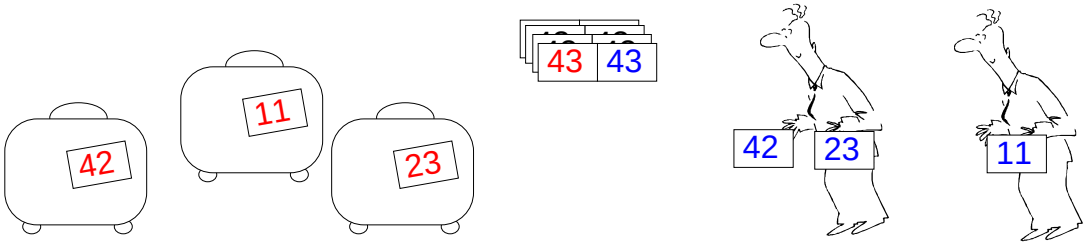
Funktionen auf Indexmengen modellieren ...

das Auftreten von Werten in Folgen:

Beispiel:

eine Folge	F := (w, e, l, l, e)
Indexmenge dazu	FPositionen := {1, 2, 3, 4, 5}
Werte in der Folge	FWerte := {w, e, l}
Auftreten von Werten in der Folge	FAuftreten := {(1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e)}
Wertebereich	FAuftreten ∈ FPositionen -> FWerte

Zuordnungen zwischen Mengen:
z. B. Gepäckstücke ihren Eigentümern zuordnen durch ein Funktionenpaar
Marke1 ∈ Ind -> Gepäckstücke (injektiv) Marke2 ∈ Ind -> Eigentümer



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213b

Ziele:

Zwei Modellierungschemata

in der Vorlesung:

- Unterschied: "Werte, die (irgendwo) auftreten", "verschiedene Auftreten eines Wertes".
- Zuordnen durch Markieren mit der gleichen Marke,

Verständnisfragen:

- Warum muss Marke1 injektiv sein, Marke2 aber nicht?
- Geben Sie weitere Anwendungen für Funktionen mit Indexmengen an.

Hinweise zum Modellieren mit Wertebereichen

- Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden.
- Typische Elemente eines Wertebereiches angeben - der Wertebereich ist eine Menge davon.
- Wertebereichen ausdruckskräftige Namen geben.
- Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen (oder zerlegen).
- Entwürfe prüfen: Wertebereiche in Worten erklären.
- Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich.
- Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln.
- Alle Klammern haben Bedeutung - zusätzliche verändern das Modell.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 214a

Ziele:
Modellierungsfehler vermeiden

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu an typischen Fehlern

Übungsaufgaben:
Untersuchen Sie:

- Welche Aspekte des Getränkeautomaten können Sie mit Mengen als Wertebereichen gut Modellieren?
- Für welche Aspekte eignet sich der Kalkül nicht so gut.

Wertebereiche zur Modellierung des Getränkeautomaten

Folgende Aspekte des Getränkeautomaten
können durch Wertebereiche Modelliert werden:

- Getränkevarianten
- Vorrat an Getränken und Zutaten
- Vorrat an Wechselgeld
- Eingeworfene Münzen
- Betätigte Wahltasten
- Anzeige des Automaten
- Zustand des Automaten
- weitere Aspekte ...

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 214b

Ziele:
Anregung zur Modellierung des Getränkeautomaten

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

2x Beweise verstehen und konstruieren

Beweise werden in vielen Gebieten der Informatik benötigt

- innerhalb von **Informatik-Theorien**
  z.B. Komplexität von Aufgaben und Algorithmen
- **Eigenschaften von modellierten Aufgaben**
  z.B. Falls ein ungerichteter Graph zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg von Knoten a nach Knoten b.
- **Entwurf von Hardware und Software**
  z.B. Diese Synchronisation der „Dining Philosophers“ führt nie zur Verklemmung.
- **Eigenschaften implementierter Software oder Hardware**
  Verifikation von Programmeigenschaften

Dieses Thema wird im Buch „Modellierung“ im Abschnitt 4.3 behandelt.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 251

Ziele:

Beweisen in der Informatik motivieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Beispiel 1

Satz 2x.1:

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist C = A $\cup$ B auch eine antisymmetrische Relation.

Beweis:

Wegen der Definition von antisymmetrisch gilt:
Für alle x, y $\in$ M gilt: Aus x A y und y A x folgt x = y.

Ebenso gilt:
Für alle x, y $\in$ M gilt: Aus x B y und y B x folgt x = y.

Wegen C = A $\cup$ B sind alle Elemente aus A oder B auch Elemente von C und es gilt:
Für alle x, y $\in$ M gilt: Aus x C y und y C x folgt x = y.

Also ist auch C antisymmetrisch. **qed.**

Ziele:
Beweis verstehen und prüfen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Gegenbeispiel

Der Satz 2x.1

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist C = A ∪ B auch eine antisymmetrische Relation.

ist nicht korrekt. Man kann ihn durch ein **Gegenbeispiel widerlegen**:

z.B. A = {(a, a), (b, c)}, B = {(d, d), (c, b)}, C = {(a, a), (b, c), (d, d), (c, b)}

Der „Beweis" von Satz 2x.1 ist fehlerhaft.

Ziele:
Beweis verstehen und prüfen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Beispiel 2

Satz 2x.2:

Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist C = A ∪ B auch eine symmetrische Relation.

Beweis:

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen C = A ∪ B gilt x A y oder x B y.

Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist.
Wegen C = A ∪ B ist auch y C x.

Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist.
Wegen C = A ∪ B ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x. Deshalb ist auch C symmetrisch.

qed.

Ziele:
Beweis verstehen und prüfen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Eigenschaften von Beweisen

Beweise können

- korrekt oder fehlerhaft,
- verständlich oder unverständlich,
- elegant oder umständlich,
- wohl-strukturiert oder verschlungen

sein.

Zur Konstruktion von Beweisen gibt es

- **Regeln, Methoden, Strukturen, Strategien.**

Dazu wird in diesem Abschnitt eingeführt.
Erst Kapitel 4 liefert die notwendigen Grundlagen der Logik.
Das Buch [D. J. Velleman: How to prove it] enthält umfassendes Material zu diesem Thema.

Manche Beweise benötigen außerdem eine gute Beweisidee.

Ziele:
Ziel dieses Abschnittes erkennen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Form von Satz und Beweis

Ein **Satz (Theorem)** besteht aus
Voraussetzungen (Prämissen) und einer **Behauptung (Konklusion)**.

Voraussetzungen und Behauptung sind Aussagen.
Wenn alle Voraussetzungen wahr sind, dann muss auch die Behauptung wahr sein.

Satz 2x.2:
Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M.
Dann ist C = A ∪ B auch eine symmetrische Relation.

Der **Beweis** eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung wahr ist und kann dabei verwenden

- die Voraussetzungen,
- Definitionen oder bekannte Tatsachen,
- im Beweis selbst oder anderweitig als wahr bewiesene Aussagen,
- Schlussregeln.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 256

Ziele:

Grundbegriffe zu Satz und Beweis

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Beweisstruktur Fallunterscheidung

Beweise können in **Fallunterscheidungen** gegliedert sein. Typische Gründe dafür:

- **Sonderfall** abspalten (z.B. leer, nicht leer)
- ***oder* in der Voraussetzung** (z.B. $(x, y) \in C = A \cup B$ bedeutet $(x, y) \in A$ ***oder*** $(x, y) \in B$)
- ***und* in der Behauptung** (Beispiel später)

Beweis 2x.2:

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist C nicht leer, dann sei x C y für beliebige x und y.

Wegen $C = A \cup B$ gilt x A y oder x B y.

Falls x A y gilt, dann ist auch y A x, weil A symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Falls x B y gilt, dann ist auch y B x, weil B symmetrisch ist.
Wegen $C = A \cup B$ ist auch y C x.

Also folgt aus x C y auch y C x.

Deshalb ist auch C symmetrisch. **qed.**

leer

nicht leer

$(x, y) \in A$

$(x, y) \in B$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 257

Ziele:

Beweise durch Fallunterscheidung strukturieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Implikation als Behauptung

Satz 2x.3:
Sei R eine zweistellige Relation über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit a ≠ b**, dann ist R **weder eine Halbordnung (HO)**, **noch eine strenge Halbordnung (sHO)**, **noch eine totale Ordnung (tO)**.

Die **Behauptung des Satzes** hat die Form

P **impliziert** (Q1 und Q2 und Q3)
(a R b und b R a mit a ≠b) **impliziert** (**nicht** HO **und nicht** sHO **und nicht** tO)

Hier kann man zwei **Techniken zur Gliederung des Beweises** anwenden:

- **Behauptung P impliziert Q: füge P zu den Voraussetzungen und beweise Q.**
- **Behauptung Q_1 und Q_2 und ...: beweise jedes Q_i in einem einzelnen Fall.**

Damit bekommt der Beweis 2x.3 folgende Struktur:

Beweis 2x.3:
Wir nehmen an, es gelte P = (a R b und b R a mit a ≠b)
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht HO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht sHO
Beweis aus Voraussetzung und P folgt nicht tO
also aus P folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 258

Ziele:
Zwei Techniken zur Beweisstrukturierung

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Beweisstruktur ausfüllen

Beweis 2x.3:
Wir nehmen an, es gelte **a R b und b R a mit a ≠ b** für die zweistellige Relation R über der Menge M.

1. Dann verletzen a R b und b R a die Definition für Antisymmetrie. Also ist R **nicht eine Halbordnung**.
2. Da R gemäß (1) nicht antisymmetrisch ist, ist R auch **nicht eine totale Ordnung**.
3. Gemäß Satz 2x.4 (Mod-2.61) ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

Also folgt aus **a R b und b R a mit a ≠ b,** dass R **weder eine Halbordnung**, **noch eine strenge Halbordnung**, **noch eine totale Ordnung** ist. **qed.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259

Ziele:
Beweisstruktur ausfüllen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

Behauptungen:

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$
$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

Beweisstruktur:

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259b

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259c

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

~~$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

$\neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259d

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

$\neg HO$ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

$\neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259e

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

~~$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

$\neg tO$

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259f

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

~~$\neg tO$~~

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259g

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259h

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

gültige Aussagen:

$R \in Pow(M \times M)$

$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$ (wg. Implik. in Beh.)

R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisy.)

R ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

R ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

Behauptungen:

~~$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b$~~

~~$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$~~ (3 Fälle wg. Konjunktion)

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte $Z = (a\ R\ b \wedge b\ R\ a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

abschließend Beweistext zusammensetzen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259i

Ziele:

Beweis konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

Methode: Beweis durch Widerspruch

Ein Beweis durch Widerspruch führt häufig zum Ziel, wenn die Behauptung eine Negation ist:

Satz: Voraussetzung **V**. Behauptung **nicht P**.

Man nimmt dann die **nicht-negierte Behauptung mit als Voraussetzung** auf und leitet mit Schlussregeln daraus einen Widerspruch her, d.h. eine Aussage, die immer falsch ist, z. B. ($x \in M$ und $x \notin M$).

Beweis: Aus **V** und **P** folgt ein **Widerspruch**. Also war die Annahme **P** falsch.
Also gilt **nicht P**. **qed.**

Häufig ist **nicht P** ein geeignetes Ziel für den Widerspruchsbeweis:

Beweis: Aus **V** und **P** folgt **nicht P**. Also gilt **(P und nicht P)**.
Also war die Annahme **P** falsch, also gilt **nicht P**. **qed.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 260

Ziele:

Methode Widerspruchsbeweis kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Beispiel für Beweis durch Widerspruch

Satz 2x.4:

Sei R eine zweistellige Relationen über der Menge M.
Wenn **a R b und b R a mit a ≠ b**, dann ist **R nicht eine strenge Halbordnung**.

Beweis durch Widerspruch:

Sei **a R b und b R a mit a ≠ b**.
Wir nehmen an, dass **R eine strenge Halbordnung** ist.
Dann muss R irreflexiv und transitiv sein.
Wegen der Transitivität folgt aus a R b und b R a auch **a R a und b R b**.
a R a verletzt jedoch die Definition von **Irreflexivität**.
Also ist die Annahme, dass R eine **strenge Halbordnung ist, falsch**.
Also ist **R nicht eine strenge Halbordnung**. **qed.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261

Ziele:

Methode Widerspruchsbeweis anwenden

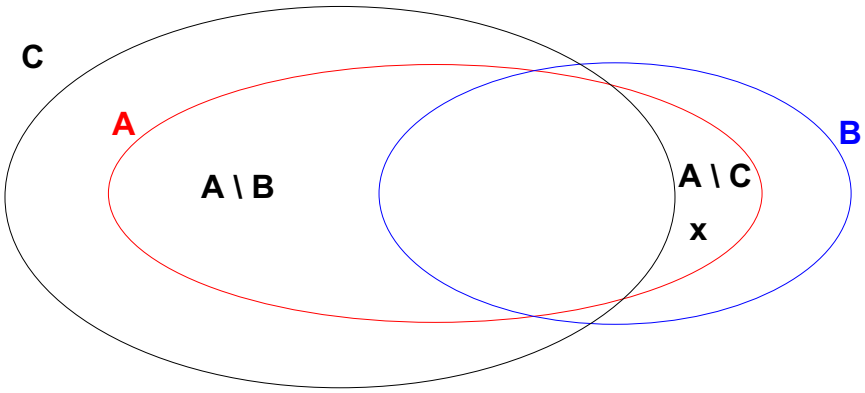
in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Satz 2x.5 zur Konstruktion eines Widerspruchsbeweises

Satz 2x.5:

A, B, C seien Mengen mit $A \setminus B \subseteq C$. **Dann gilt:**
Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in B$.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261a

Ziele:
Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261b

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261c

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$ zeige Widerspruch
welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261d

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$ — Def. \
$x \in A$
$x \notin C$

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ — Implikation
$x \in B$ — zeige Widerspruch

welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261e

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$ Def. \
$x \in A$ Def. \
$x \notin C$ Def. \
$x \in C$ Widerspruch!

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$ zeige Widerspruch
welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.
Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.
Das ist ein Widerspruch.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261f

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

gültige Aussagen:

A, B, C Mengen
$A \setminus B \subseteq C$
(es gibt ein $x \in A \setminus C$)
$x \notin B$ Def. \
$x \in A$ Def. \
$x \notin C$ Def. \
$x \in C$ Widerspruch!

Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$ Implikation
$x \in B$ zeige Widerspruch
welchen?

Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt $A \setminus B \subseteq C$.
Es gibt ein $x \in A \setminus C$.
Beweise $x \in B$.
Wir nehmen an $x \notin B$ und zeigen einen Widerspruch:
Wegen $x \in A \setminus C$ gilt $x \in A$ und $x \notin C$.
Wegen $A \setminus B \subseteq C$ und $x \notin B$ und $x \in A$ gilt $x \in C$.
Das ist ein Widerspruch.
Also ist die Annahme $x \notin B$ falsch; es gilt $x \in B$.
Also, für Mengen A, B, C mit $A \setminus B \subseteq C$ gilt: Aus $x \in A \setminus C$ folgt $x \in B$. **q.e.d.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261i

Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

Unendlich viele Primzahlen

Satz 2x.6: Es gibt **unendlich viele Primzahlen**.

Beweis durch Widerspruch (nach Euclid) 2x.6:
Wir nehmen an, dass es **endlich viele Primzahlen** gibt, nämlich $\mathbf{p_1, p_2, ..., p_n}$.
Sei $\mathbf{m = p_1 p_2 ... p_n + 1}$.
m ist nicht durch p_1 teilbar, denn m dividiert durch p_1 ergibt $p_2 ... p_n$ mit Rest 1. Aus demselben Grund ist m nicht durch p_2, ..., p_n teilbar.
Wir verwenden nun die Tatsache, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, entweder **eine Primzahl** ist oder als **Produkt von Primzahlen** geschrieben werden kann. m ist größer als 1, also ist m entweder eine Primzahl oder m ist ein Produkt von Primzahlen.

Nehmen wir an, **m ist eine Primzahl**. m ist größer als jede Zahl p_1, p_2, ..., p_n. Also haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das **widerspricht** der Annahme, dass p_1, p_2, ..., p_n **alle** Primzahlen sind.

Nehmen wir nun an, dass **m ein Produkt von Primzahlen** ist. Sei q eine dieser Primzahlen. Dann ist q ein Teiler von m. Da p_1, p_2, ..., p_n nicht Teiler von m sind, haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das ist wie oben ein **Widerspruch**.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, hat zum **Widerspruch** geführt. Also gibt es unendlich viele Primzahlen. **qed.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 262

Ziele:

Beweisstruktur verstehen

in der Vorlesung:

- Voraussetzungen und Behauptung des Satzes identifizieren.
- Negation der Behauptung als Annahme.
- Tatsache über Primzahlen als weitere Voraussetzung verwenden.
- Oder in der Voraussetzung führt zu Fallunterscheidung.
- Jeder Fall wird einzeln zum Widerspruch geführt.

Methode: Beweis durch Induktion

Beweise durch Induktion sind geeignet für Aussagen der Form

Für alle n $\in \mathbb{N}_0$ gilt P (n) .

Ein Beweis durch Induktion hat folgende Struktur:

Induktionsanfang:Beweis von **P (0)** .

Induktionsschritt:Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus P (n) folgt P (n+1)**. **qed.**

Manchmal reicht im Beweis des Induktionsschrittes P (n) als Vorbedingung nicht aus. Dann kann man in der folgenden Variante P (0), P (1), ..., P (n) verwenden:

Variante des Induktionsbeweises:

Induktionsanfang: Beweis von **P (0)** .

Induktionsschritt: Sei n $\in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Beweis von **Aus [P (0), P (1), ..., P (n)] folgt P (n+1)**. **qed.**

Zum Beweis von Aussagen der Form **Für alle n $\in \mathbb{N}_0$, n $\geq$ k gilt P (n)** beginnt man im Induktionsanfang mit **P (k) statt P (0)**.

Statt *Beweis durch Induktion* sagt man auch *Beweis durch vollständige Induktion*.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 263

Ziele:

Beweismethode Induktion verstehen

in der Vorlesung:

- Struktur erklären.

Beispiel für Beweis durch Induktion

Satz 2x.7:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

Für n = 0 gilt $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest und

sei $\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1}$. Dann ist

$$2^0 + 2^1 + ... + 2^n + 2^{n+1} = (\mathbf{2^0 + 2^1 + ... + 2^n}) + 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 * 2^{n+1} - 1$$

$$= \mathbf{2^{n+2} - 1} \qquad \textbf{qed.}$$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 264

Ziele:

Beispiel zur Beweismethode Induktion

in der Vorlesung:

- Beispiel nachvollziehen.

Zusammenfassung

Satzform: Voraussetzungen V. Behauptung B.

Beweismethoden:

Direkter Beweis:
Aus **V** und bewiesenen Tatsachen mit Schlussregeln **B** nachweisen.

Widerspruchsbeweis:
Nicht **B** annehmen. Aus **V** *und nicht* **B** einen Widerspruch ableiten. Also gilt **B**.

Induktionsbeweis von Behauptung B = **Für alle n** $\in \mathbb{N}_0$ **gilt P (n):**
Induktionsanfang: Beweis von P (0),
Induktionsschritt: Beweis von Aus P (n) folgt P (n+1)

Techniken:

Fallunterscheidung bei **Sonderfällen**, V_1 ***oder*** V_2, B_1 ***und*** B_2

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und* P die Behauptung Q folgern.

Viele weitere Strategien, Techniken und Beispiele im Buch von Velleman, z.B.

Wenn B = P ***impliziert*** Q, dann aus V *und nicht* Q die Behauptung *nicht* P folgern.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 265

Ziele:
Methoden und Techniken anwenden können

in der Vorlesung:
Zum Üben ermuntern.

3 Terme und Algebren
3.1 Terme

In allen formalen Kalkülen benutzt man **Formeln als Ausdrucksmittel**.
Hier betrachten wir **nur ihre Struktur - nicht ihre Bedeutung**. Wir nennen sie **Terme**.

Terme bestehen aus **Operationen**, **Operanden**, **Konstanten und Variablen**:

a + 5 blau ? gelb = grün ♥ > ♦

Terme werden nicht „ausgerechnet“.
Operationen, Konstanten und Variablen werden als **Symbole ohne Bedeutung** betrachtet.

Notation von Termen:

Infix-, **Postfix**-, **Präfix**- und **Baum**-Form

Umformung von Termen:

Grundlage für die Anwendung von Rechenregeln, Gesetzen

Für **Variable** in Termen werden Terme **substituiert:**

in a + a = 2∗a substituiere a durch 3∗b 3∗b + 3∗b = 2∗3∗b

Unifikation: Terme durch Substitution von Variablen gleich machen,
z. B. um die Anwendbarkeit von Rechenregeln zu prüfen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 301

Ziele:

Informelle Übersicht

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Terme als Strukturen erklären.
- Terme umformen ohne zu "rechnen".

Sorten und Signaturen

Terme werden zu einer **Signatur** gebildet.
Sie legt die verwendbaren Symbole und die Strukturierung der Terme fest.

Signatur Σ := (S, F), S ist eine Menge von **Sorten**, F ist eine Menge von **Operationen**.

Eine **Sorte s** $\in$ **S** ist ein **Name für eine Menge von Termen**, z. B. ARITH, BOOL;
verschiedene Namen benennen disjunkte Mengen

Eine **Operation f** $\in$ **F** ist ein **Operatorsymbol**, beschrieben durch
Anzahl der Operanden (**Stelligkeit)**,
Sorten der Operanden und **Sorte des Ergebnisses**

0-stellige Operatoren sind Konstante, z. B. true, 1

Beispiele:

einzelne Operatoren:

Name	**Operandensorten**	**Ergebnissorte**
+:	ARITH x ARITH	-> ARITH
<:	ARITH x ARITH	-> BOOL
$\wedge$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
true:		-> BOOL
1:		-> ARITH

Signatur Σ_{BOOL} := (S_{BOOL}, F_{BOOL})

S_{BOOL} := { BOOL },
F_{BOOL} :=
{ true: -> BOOL,
false: -> BOOL,
$\wedge$: BOOL x BOOL -> BOOL,
$\neg$: BOOL -> BOOL
}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 302

Ziele:

Begriff der Signatur verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Begriffe
- Beispiele für Terme zu Signaturen
- Hinweis: Der Name Signatur wird 2-fach verwendet: wie hier definiert und als "Signatur einer Funktion (siehe Folie Mod-2.11)".

Korrekte Terme

In **korrekten Termen** muss jeweils die Zahl der Operanden mit der **Stelligkeit** der Operation und die **Sorten** der Operandenterme mit den Operandensorten der Operation übereinstimmen.

Induktive Definition der **Menge τ der korrekten Terme der Sorte s zur Signatur Σ = (S, F)**:
Sei die Signatur Σ = (S, F). Dann ist t ein **korrekter Term der Sorte s$\in$ S**, wenn gilt

- t = **v** und v ist der **Name einer Variablen** der Sorte s, oder
- t = **f (t_1, t_2, .., t_n)**, also die **Anwendung einer n-stelligen Operation**
  f: s_1 x s_2 x ... x s_n -> s $\in$ F
  wobei jedes **t_i ein korrekter Term der Sorte s_i** ist
  mit n $\geq$ 0 (einschließlich Konstante f bei n = 0) und i $\in$ {1, ..., n}

f (t_1,..., t_n) ist ein **n-stelliger Term**; die t_i sind seine **Unterterme**.

Korrekte Terme**,** die **keine Variablen** enthalten, heißen **Grundterme**.

Beispiele: korrekte Terme zur Signatur Σ_{BOOL}:
false $\quad \neg$ true $\quad$ true $\wedge$ x $\quad \neg$(a $\wedge$ b) $\quad$ x $\wedge \neg$ y

nicht korrekt:a $\neg$ b $\quad \neg$ ($\wedge$ b)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 303

Ziele:

Regeln zur Struktur von Termen

in der Vorlesung:

- Terme zu den Signaturen von Mod-3.2 konsturieren.
- Beispiele für falsche Terme.
- Vergleich mit Typregeln in Programmiersprachen.

Verständnisfragen:

- Welche Terme kann man aus den Operationen 0: -> N0 und succ: N0 -> N0 bilden?
- Geben Sie einige Terme zu den Signaturen von Mod-3.2 an.

Notationen für Terme

Notation eines n-stelligen Terms mit Operation (Operator) f und Untertermen t_1, t_2, ..., t_n:

Bezeichnung	Notation	Beispiele
Funktionsform:	Operator **vor der geklammerten Folge** seiner Operanden f (t_1, t_2, ..., t_n)	$\wedge$ (< (0, a), $\neg$ (< (a, 10)))
Präfixform:	Operator **vor** seinen Operanden f t_1 t_2 ... t_n	$\wedge$ < 0 a $\neg$ < a 10
Postfixform:	Operator **nach** seinen Operanden t_1 t_2 ... t_n f	0 a < a 10 < $\neg$ $\wedge$
Infixform	2-stelliger Operator **zwischen** seinen (beiden) Operanden t_1 f t_2	0 < a $\wedge$ $\neg$ a < 10

Die **Reihenfolge der Operanden** ist in allen vier Notationen **gleich**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 304

Ziele:

Verschiedene Notationen für denselben Term

in der Vorlesung:

An weiteren Beispielen erläutern:

- Struktur der Notationen
- Beispiele für 2-, 1- und 3-stellige Operationen
- Umformungen

Verständnisfragen:

- Kennzeichnen Sie alle Teilterme eines Terms in den 4 Formen!
- Wie finden Sie in der Postfixform die Operanden zu einem Operator?
- Können in einem Term in Infixform die Operanden immer eindeutig zugeordnet werden?

Präzedenzen und Klammern für Infixform

Die **Infixform** benötigt **Klammern** oder **Präzedenzen**, um Operanden an ihren Operator zu binden: Ist in x **+** 3 ***** y die 3 rechter Operand des **+** oder linker Operand des ***** ?

Klammern beeinflussen die Struktur von Termen in der Infixform:
z. B. (x **+** 3) ***** y oder x **+** (3 ***** y)
Redundante Klammern sind zulässig.
Ein Term ist **vollständig geklammert**, wenn er und jeder seiner Unterterme geklammert ist:
z. B. ((x) **+** ((3) ***** (y)))

Für die **Infixform** können den Operatoren unterschiedliche **Bindungsstärken (Präzedenzen)** zugeordnet werden, z. B. bindet ***** seine Operanden vereinbarungsgemäß stärker an sich als **+**, d. h. ***** hat **höhere Präzedenz** als **+**.
Damit sind x **+** 3 ***** y und x **+** (3 ***** y) verschiedene Schreibweisen für denselben Term.

Für **aufeinanderfolgende Operatoren gleicher Präzedenz** muss geregelt werden, ob sie ihre Operanden **links-assoziativ** oder **rechts-assoziativ** binden:

links-assoziativ:	x **+** 3 **+** y	steht für (x **+** 3) **+** y
rechts-assoziativ:	x ****** 3 ****** y	steht für x ****** (3 ****** y)

Funktionsform, Präfixform, Postfixform benötigen weder
Regeln für Präzedenz oder Assoziativität noch zusätzliche Klammern!

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 305

Ziele:

Präzedenzen verstehen

in der Vorlesung:

An weiteren Beispielen erläutern:

- notwendige, redundante und vollständige Klammerung von Termen,
- Verwechselung mit Klammern 1-elementiger Folgen vermeiden,
- Präzedenzen und Assoziativität,
- Präzedenzen in Programmiersprachen

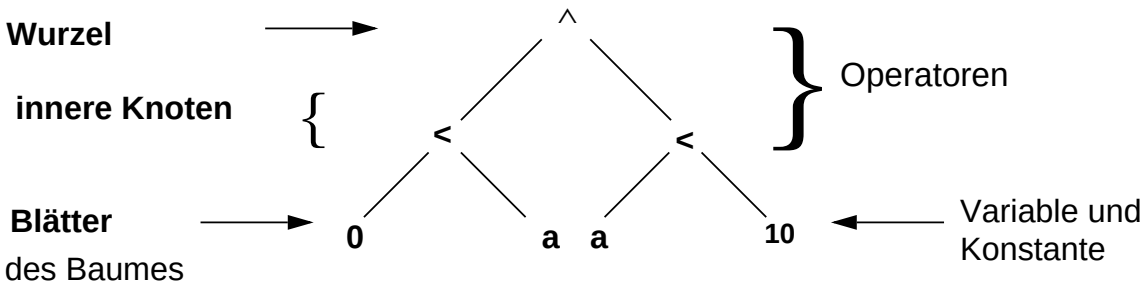
Verständnisfragen:

- Weshalb benötigen Präfix- und Postfixform keine Klammern?
- Welche Präzedenzen haben die Operatoren in Java?

Terme als Bäume

Terme kann man als Bäume darstellen (**Kantorowitsch-Bäume**):

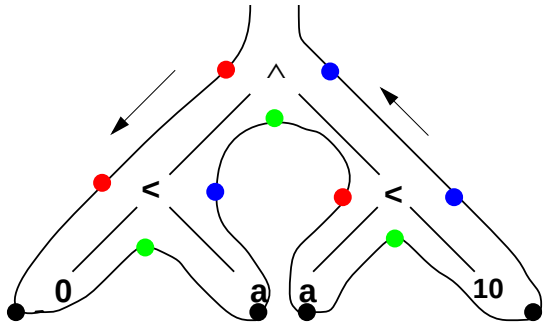
Term: **0 < a ∧ a < 10**



Aus einem Durchlauf des Baumes in Pfeilrichtung erzeugt man

- **Präfixform**, wenn man beim **ersten Besuch**
- **Postfixform**, wenn man beim **letzten Besuch**
- **Infixform**, wenn man beim **vorletzten Besuch** (bei **2-stelligen** Operatoren)

den Operator aufschreibt.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 306

Ziele:

Zusammenhang der Darstellungen verstehen

in der Vorlesung:

- Bäume erläutern
- Baumdurchläufe erläutern
- Rekursive Definition der Notationen

Verständnisfragen:

- Wie hängen Baumdarstellung und vollständig geklammerte Terme zusammen?

Substitution und Unifikation

Eine **Substitution** beschreibt, wie in einem Term vorkommende **Variablen durch Terme ersetzt** werden.

Eine **einfache Substitution** σ **= [v / t]** ist ein Paar aus einer Variablen v und einem Term t zur Signatur $\sum$. v und t müssen **dieselbe Sorte** s haben.
Beispiel: σ = [x / 2*****b]

Die **Anwendung einer Substitution** σ **auf einen Term** u schreibt man **u** σ, z. B. (x+1) [x / 2*****b].

Die **Anwendung einer einfachen Substitution u** σ mit σ **= [v / t]**, ist **definiert** durch

- **u [v / t] = t** , falls u die zu ersetzende Variable v ist,
- **u [v / t] = u** , falls u ≠ v und u eine Konstante oder eine andere Variable ist,
- **u [v / t] = f (u_1 [v / t], u_2 [v / t], ..., u_n [v / t])** , falls u = f (u_1, u_2, ..., u_n)

D. h. in u werden **alle Vorkommen der Variablen v gleichzeitig durch den Term t ersetzt**.

Kommt v auch in t vor, so wird es nicht nochmals ersetzt!

Beispiele: (x + 1) [x / 2*****b] = (2*****b + 1)

(x - x) [x / 3] = (3 - 3)

(x + y) [y / y*****y] = (x + y*****y)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 307

Ziele:

Formale Definition des Einsetzens für Variable

in der Vorlesung:

An Beispielen erlätern:

- konsistentes Ersetzten mehrerer Vorkommen
- gleichzeitiges Ersetzen
- Ersetzen wird nicht iteriert
- Variable können ungebunden bleiben

Hinweis: Wir haben hier **nicht die Notation aus dem Skript vom WS 2000/2001 und nicht die aus dem Buch von Goos verwendet! Dort werden die Paare in umgekehrter Reihenfolge angegeben: [Term/Variable].**

Verständnisfragen:

Geben Sie Beispiele für Substitutionen zu Termen der Signatur zu BOOL an.

Mehrfache Substitution

In einer **mehrfachen Substitution** $\sigma = [v_1 / t_1, ..., v_n / t_n]$ müssen alle Variablen v_i paarweise verschieden sein. In jedem v_i / t_i müssen v_i und t_i jeweils derselben Sorte s_i angehören.
σ wird dann auf einen Term u wie folgt angewandt:

- $u \sigma = t_i$, falls $u = v_i$ für ein $i \in \{1, ..., n\}$,
- $u \sigma = u$, falls u eine Konstante ist oder eine Variable, die nicht unter v_i für ein $i \in \{1, ..., n\}$ vorkommt,
- $u \sigma = f (u_1 \sigma, u_2 \sigma, ..., u_n \sigma)$, falls $u = f (u_1, u_2, ..., u_n)$

D. h. σ ist die gleichzeitige Substitution aller Vorkommen jeder Variablen v_i jeweils durch den Term t_i.

Beispiele: $\sigma = [x / 2*b, y / 3]$

$(x + y) \sigma = (2*b + 3)$
$(y + a*y) \sigma = (3 + a*3)$
$(x * y) [x / y,\ y / y*y] = (y * (y * y))$

Die **leere Substitution** wird **[ ]** notiert. Für alle Terme t gilt **t [ ] = t**.
Außerdem gilt **[v / v] = [ ]** für jede Variable v.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 308

Ziele:

Mehrfache Substitutionen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen erlätern:

- konsistentes Ersetzten mehrerer Variablen,

Hintereinanderausführung von Substitutionen

Auf einen Term können **mehrere Substitutionen hintereinander** ausgeführt werden,

z. B. $u\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = ((u\ \sigma_1)\ \sigma_2)\ \sigma_3$

$(x+y)\ [x/y*x]\ [y/3]\ [x/a] = (y*x+y)\ [y/3]\ [x/a] = (3*x+3)\ [x/a] = (3*a+3)$

Mehrere **Substitutionenen hintereinander** können als **eine Substitution** angesehen werden:

z. B. $u\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = u\ (\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3) = u\ \sigma$

Mehrere **einfache Substitutionen hintereinander** kann man **in eine mehrfache Substitution** mit gleicher Wirkung umrechnen:

Die Hintereinanderausführung $[\ x_1 / t_1, ..., x_n / t_n\ ]\ [\ y / r\ ]$

hat auf jeden Term die gleiche Wirkung wie

falls y unter den x_i vorkommt $[\ x_1 / (t_1[\ y / r\ ]), ..., x_n / (t_n\ [\ y / r\ ])]$
falls y nicht unter den x_i vorkommt $[\ x_1 / (t_1[\ y / r\ ]), ..., x_n / (t_n\ [\ y / r\ ]), y / r\ ]$

Beispiel: $[\ x / y*x\ ]\ [\ y / 3\ ]\ [\ x / a\ ] = [\ x / 3*x, y / 3]\ [\ x / a\ ] = [\ x / 3*a, y / 3\ ]$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 308a

Ziele:

Umgang mit Substitutionen verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen erlätern:

- Hintereinanderausführung,
- Umrechnung.

Verständnisfragen:

Begründen Sie die Regel für die Umrechnung.

Umfassende Terme

Rechenregeln werden mit **allgemeineren Termen** formuliert, die auf **speziellere Terme** angewandt werden,

z. B. Distributivgesetz:	$a * (b + c)$	=	$a * b + a * c$
angewandt auf	$2 * (3 + 4*x)$	=	$2 * 3 + 2 * 4*x$

Ein **Term s umfasst einen Term t**, wenn es eine Substitution σ gibt, die s in t umformt: $s\ \sigma = t$

s umfasst t, ist eine **Quasiordnung**, d. h. die Relation **umfasst** ist

transitiv: sei $r\ \sigma_1 = s$, $s\ \sigma_2 = t$, dann ist $r\ (\sigma_1\ \sigma_2) = t$

reflexiv: $t\ [\ ] = t$, mit der leeren Substitution [ ]

Eine **Halbordnung ist umfasst nicht**, weil

nicht antisymmetrisch: Terme, die sich nur in den Variablennamen unterscheiden, kann man ineinander umformen, z. B.
$2*x\ [\ x / y\ ] = 2*y$ und $2*y\ [\ y / x\ ] = 2*x$

Deshalb gilt zwar der allgemeinere Term $a * (b + c)$ umfasst den spezielleren $2 * (3 + 4*x)$, aber nicht immer ist ein Term s allgemeiner als ein Term t, wenn s umfasst t: 2**x und 2**y

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 309

Ziele:

Terme als Muster verstehen

in der Vorlesung:

- Substitution als Anwendung einer Rechenregel
- Erläuterung der Relation "umfasst"
- weitere Beispiele

Verständnisfragen:

Warum ist es nicht völlig korrekt, zu sagen, dass t spezieller ist als s, wenn s t umfasst?

Unifikation

Die **Unifikation substituiert zwei Terme, sodass sie gleich werden**.

Zwei Terme s und t sind unifizierbar, wenn es eine Substitution σ gibt mit s σ = t σ.
σ heißt **Unifikator von s und t**.

Beispiel: Terme: s = (x + y) t = (2 + z)
Unifikatoren: σ_1 = [x / 2, y / z] σ_2 = [x / 2, z / y],
σ_3 = [x / 2, y / 1, z / 1] σ_4 = [x / 2, y / 2, z / 2] ...

Ist σ **ein Unifikator** von s und t und τ **eine Substitution**, dann ist auch die Hintereinanderausführung $\sigma\ \tau = \sigma'$ auch ein Unifikator von s und t.

Ein **Unifikator σ heißt allgemeinster Unifikator** der Terme s und t, wenn es zu allen anderen Unifikatoren σ' eine Substitution τ gibt mit $\sigma\ \tau = \sigma'$.

Im Beispiel sind σ_1 und σ_2 allgemeinste Unifikatoren, z. B. σ_1 [z / 1] = σ_3

Es kann **mehrere allgemeinste Unifikatoren** geben. Sie können durch **Umbenennen von Variablen** ineinander überführt werden, z. B.

σ_1 [**z / y**] = [x / 2, y / z] [z / y]= [x / 2, y / y, z / y] = [x / 2, z / y] = σ_2

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 310

Ziele:

Allgemeines Prinzip Unifikation verstehen

in der Vorlesung:

An Beispielen zeigen:

- Unifikatoren
- nicht unifizierbare Terme
- allgemeinste Unifikatoren machen keine unnötigen Festlegungen.
- Zur letzten Zeile der Folie: Eine Substitution [y / y] hat keine Wirkung, also [y / y] = []. In mehrfachen Substitutionen kann man Komponenten der Form y / y weglassen und Komponenten vertauschen, ohne die Wirkung der Substitution zu ändern.

Verständnisfragen:

- Wie müssen 2 Terme beschaffen sein, damit es Unifikatoren gibt, die verschieden sind von den allgemeinsten Unifikatoren? Hinweis: Nur wenn ein allgemeinster Unifikator noch Variablen offen lässt, kann es speziellere geben.

Unifikationsverfahren

Unifikation zweier Terme s und t nach Robinson:

Seien s und t Terme in **Funktionsschreibweise**.
Dann ist das **Abweichungspaar A(s, t) = (u, v)** das erste Paar unterschiedlicher, korrespondierender Unterterme u und v, das man beim Lesen von links nach rechts antrifft.

Algorithmus:

1. Setze σ = [ ] (leere Substitution)
2. Solange es ein Abweichungspaar A(s σ, t σ) = (u, v) gibt wiederhole:
   a. ist **u eine Variable x**, die in v nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / v], oder
   b. ist **v eine Variable x**, die in u nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / u],
   c. **sonst** sind die Terme s und t **nicht unifizierbar; Abbruch** des Algorithmus.
3. Bei Erfolg gilt s σ = t σ und σ **ist allgemeinster Unifikator**.

Beachte, dass bei jeder Iteration die bisherige Substitution auf die vollständigen Terme s, t angewandt wird.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 311

Ziele:

Terme systematisch unifizieren

in der Vorlesung:

- Verfahren an Beispielen zeigen.
- Begründen, weshalb die Substitution immer wieder auf s und t angewandt wird.
- Begründen, weshalb in 2a und 2b geprüft wird, ob die Variable x in dem Unterterm vorkommt.

Verständnisfragen:

- Zeigen sie an einem Beispiel, dass es nötig ist, in 2a und 2b zu prüfen ob die Variable x in dem Unterterm vorkommt.

Beispiel für Unifikationsverfahren

Unifikation zweier Terme s und t nach Robinson:

s = + (***** (2, x), 3)
t = + (z, x) σ = [ ]

Schritt ↓ Abweichungspaar

1 s σ = + (***** (2, x), 3)
t σ = + (z, x) Fall 2b: σ = [ ] [z / ***** (2, x)]

↓ Abweichungspaar

2 s σ = + (***** (2, x), 3)
t σ = + (***** (2, x), x) Fall 2b: σ = [ ] [z / ***** (2, x)] [x / 3]

3 s σ = + (***** (2, 3), 3)
t σ = + (***** (2, 3), 3) allgemeinster Unifikator: σ = [z / ***** (2, x)] [x / 3] =
[z / ***** (2, 3), x / 3]

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 312

Ziele:

Verfahren von Robinson anwenden

in der Vorlesung:

Verfahren an Beispielen zeigen.

3.2 Algebren

Eine **Algebra** ist eine **formale Struktur,** definiert durch
eine **Trägermenge**, **Operationen** darauf und **Gesetze** zu den Operationen.

In der Modellierung der Informatik spezifiziert man mit Algebren
Eigenschaften veränderlicher Datenstrukturen und dynamische Systeme,
z. B. Datenstruktur *Keller* oder die Bedienung eines Getränkeautomaten.

Wir unterscheiden 2 Ebenen: **abstrakte Algebra** und **konkrete Algebra**:

Eine **abstrakte Algebra** spezifiziert Eigenschaften **abstrakter Operationen**,
definiert nur duch eine **Signatur** - Realisierung durch Funktionen bleibt absichtlich offen

Trägermenge: korrekte Terme zu der Signatur

Gesetze erlauben, Vorkommen von Termen durch andere Terme zu ersetzen
z. B. ¬ false –> true pop (push (k, t)) –> k

Eine **konkrete Algebra** zu einer abstrakten Algebra

definiert **konkrete Funktionen** zu den Operationen der Signatur,
so dass die Gesetze in **Gleichungen zwischen den Funktionstermen** übergehen.

Sie beschreibt so eine **Implementierung** der spezifizierten Datenstruktur,
bzw. des Systems

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 313

Ziele:

Vorschau zur Modellierung mit Algebren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Abstrakte Algebra

Eine **abstrakte Algebra A = (τ, Σ, Q)** ist definiert durch die **Menge korrekter Terme** τ zur **Signatur** Σ und eine **Menge von Axiomen (Gesetzen) Q**.

Axiome haben die Form t_1 -> t_2, wobei t_1, t_2, **korrekte Terme gleicher Sorte** sind, die **Variablen** enthalten können. Die Algebra definiert, wie man Terme **mit den Axiomen in andere Terme umformen** kann.

Mit Axiomen umformen heißt: Unter Anwenden eines Axioms t_1 -> t_2 kann man einen Term s_1 in einen Term s_2 umformen. Wir schreiben s_1 -> s_2, wenn gilt:

- s_1 und s_2 stimmen in ihren „äußeren" Strukturen überein und unterscheiden sich nur durch die Unterterme r_1 und r_2 an entsprechenden Positionen in s_1 und s_2, und
- es gibt eine Substitution σ , sodass gilt $t_1 \sigma = r_1$ und $t_2 \sigma = r_2$

Terme	s_1 =	..... r_1	->	..... r_2	=	s_2
		=		=		
		$t_1 \sigma$		$t_2 \sigma$		
Axiom		t_1	->	t_2		

s ist in t umformbar, wenn es eine endliche Folge von Termen $s = s_0, s_1, ..., s_n = t$ mit s_{i-1} -> s_i gibt; wir schreiben dann s -> t.

„->" ist **transitiv**. Wenn es auch **irreflexiv** ist (so sollten die Axiome gewählt werden), ist es eine **strenge Halbordnung**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 314

Ziele:

Axiome definieren Terme als gleichbedeutend

in der Vorlesung:

- Anwendungen von Axiomen auf Termpaare zeigen (Substitution)
- Beispiel: Kommutativgesetz anwenden

Verständnisfragen:

Erklären Sie Anwendungen des Kommutativgesetzes präzise in der definierten Terminologie.

Beispiel: abstrakte Algebra Bool

Signatur Σ = ({BOOL}, F)

Operationen F:

true:		-> BOOL
false:		-> BOOL
$\wedge$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
$\vee$:	BOOL x BOOL	-> BOOL
$\neg$:	BOOL	-> BOOL

Axiome Q: für alle x,y der Sorte BOOL gilt

Q_1:	$\neg$ true	–> false
Q_2:	$\neg$ false	–> true
Q_3:	true $\wedge$ x	–> x
Q_4:	false $\wedge$ x	–> false
Q_5:	x $\vee$ y	–> $\neg$ ($\neg$ x $\wedge$ $\neg$ y)

Die Axiome sind geeignet, alle korrekten Terme ohne Variablen in in einen der beiden Terme **true** oder **false** umzuformen.

true und **false** heißen **Normalformen** (siehe Folie 3.20).

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 315

Ziele:

Beispiel für eine abstrakte Algebra

in der Vorlesung:

- Algebra Bool erläutern
- Gesetze anwenden
- Weitere Gesetze formulieren

Konkrete Algebra

Zu einer abstrakten Algebra $A_a = (\tau, (S, F), Q)$, kann man

konkrete Algebren wie $\mathbf{A_k = (W_k, F_k, Q)}$

angeben, wobei

W_k eine **Menge von Wertebereichen** ist, je einer **für jede Sorte** aus S,

F_k eine **Menge von Funktionen** ist, je eine **für jede Operation** aus F.

Die Definitions- und Bildbereiche der Funktionen müssen konsistent den Sorten der Operationen zugeordnet werden.

Den **Axiomen Q** müssen **Gleichungen zwischen den Funktionstermen** in den Wertebereichen entsprechen.

Es können in der konkreten Algebra noch weitere Gleichungen gelten.

Eine konkrete Algebra heißt auch **Modell der abstrakten Algebra**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 316

Ziele:

Zusammenhang zwischen konkreter und abstrakter Algebra verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel Mod-225a erläutern

Beispiel für eine konkrete Algebra

Beispiel: eine konkrete Algebra FSet zur abstrakten Algebra Bool:

	konkrete Algebra FSet	**abstrakte Algebra Bool**
W_k:	{∅, {1}}	Sorte BOOL
F_k:	{1}	true
	∅	false
	Mengendurchschnitt ∩	∧
	Mengenvereinigung ∪	∨
	Mengenkomplement bezüglich {1}	¬

Axiome Q:
Man kann zeigen, dass die Axiome Gleichungen zwischen den Termen in W_k entsprechen:
z. B. $\emptyset \cap x = \emptyset$ entspricht $false \wedge x \rightarrow false$

Die boolesche Algebra mit den üblichen logischen Funktionen ist natürlich auch eine konkrete Algebra zur abstrakten Algebra Bool.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 317

Ziele:

Beispiel für Zusammenhang zwischen konkreter und abstrakter Algebra

in der Vorlesung:

Beispiel mit Folie Mod-3.16 erläutern

- Funktionstafeln der konkreten Funktionen angeben
- Gültigkeit der Gleichungen zu den Axiomen zeigen
- Ebenso für die konkrete boolesche Algebra

Übungsaufgaben:

Tauschen Sie in FSet die Funktionen zu T und F. Gelten die Gleichungen zu den Axiomen noch?

Verständnisfragen:

- Zeigen Sie, dass die Gleichungen zu allen Axiome Q von Bool in FSet gelten.

Beispiel 2.2: Datenstruktur Keller

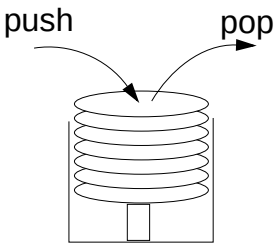
Die Eigenschaften einer **Datenstruktur Keller** beschreiben wir zunächst informell.
Folgende **Operationen** kann man mit einem Keller ausführen:

create Stack:	liefert einen leeren Keller
push:	fügt ein Element in den Keller ein
pop:	entfernt das zuletzt eingefügte Element
top:	liefert das zuletzt eingefügte und nicht wieder entfernte Element
empty:	gibt an, ob der Keller leer ist.

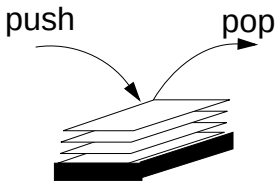
Die Eigenschaften der Datenstruktur Keller sollen präzise durch eine abstrakte Algebra spezifiziert werden.

Beispiele

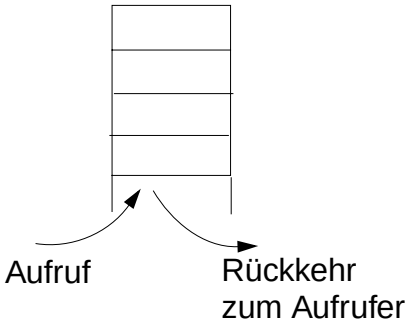
Tellerstapel



Aktenstapel



Laufzeitkeller



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 318

Ziele:

Das Kellerprinzip informell verstehen

in der Vorlesung:

- Keller-Prinzip: Last-in-first-out (LIFO)
- Beispiele erläutern
- Anwendung eines Kellers: Infix in Postfix umwandeln

Verständnisfragen:

- Erklären Sie das Kellerprinzip an der Abarbeitung von Funktions- bzw. Methodenaufrufen in Programmen.

Beispiel: Abstrakte Algebra spezifiziert Keller

Abstrakte Algebra Keller:

Signatur $\Sigma = (S, F)$,
Sorten S = {Keller, Element, BOOL},
Operationen F:

createStack:		-> Keller
push:	Keller x Element	-> Keller
pop:	Keller	-> Keller
top:	Keller	-> Element
empty:	Keller	-> BOOL

Axiome Q: für beliebige Terme t der Sorte Element und k der Sorte Keller gilt:

K1:	empty (createStack)	-> true
K2:	empty (push (k, t))	-> false
K3:	pop (push (k, t))	-> k
K4:	top (push (k, t))	-> t

Keller ist die Sorte, deren Terme Kellerinhalte modellieren.
Element und BOOL sind **Hilfssorten** der Algebra.

Implementierungen der abstrakten Algebra Keller können durch **konkrete Algebren** dazu beschrieben werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 319

Ziele:

Abstrakte Algebra als Spezifikation verstehen

in der Vorlesung:

- Terme umformen
- K3 mit LIFO begründen
- Anschauliche Darstellungen und Implementierungen von Kellerinhalten entsprechen konkreten Algebren

Verständnisfragen:

- Geben sie verschiedene Terme an, die zu top (push (createStack, 1)) und zu push (push (createStack, 1), 2) gleichbedeutend sind.

Klassifikation von Operationen

Die Operationen einer Algebra werden in 3 disjunkte Mengen eingeteilt:

Konstruktoren: Ergebnissorte ist die definierte Sorte

Hilfskonstruktoren: Ergebnissorte ist die definierte Sorte und sie können durch Axiome aus Termen entfernt werden

Projektionen: andere Ergebnissorte

z. B. in der Keller-Algebra: definierte Sorte ist Keller

createStack:		-> Keller	**Konstruktor**
push:	Keller x Element	-> Keller	**Konstruktor**
pop:	Keller	-> Keller	**Hilfskonstruktor** (K3 entfernt ihn)
top:	Keller	-> Element	**Projektion**
empty:	Keller	-> BOOL	**Projektion**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 320

Ziele:

Einteilung der Operationen

in der Vorlesung:

- Klassifikation erläutern
- Konstruktoren zur Algebra Bool angeben.

Verständnisfragen:

- Klassifizieren Sie die Operationen der Algebra Bool.

Normalform

Terme ohne Variable der definierten Sorte sind in **Normalform**, wenn sie nur **Konstruktoren** enthalten **kein Axiom anwendbar** ist.

Normalform-Terme der Algebra Bool sind: true false

Normalform-Terme der Keller-Algebra haben die Form:
push (.... push (createStack, n_1) , ...), n_m), mit $m \geq 0$

Die **Terme in Normalform** sind die minimalen Elemente bzgl. der strengen Halbordnung ->.

Terme s, t, die in **dieselbe Normalform** umformbar sind, heißen **gleichbedeutend**, $s \equiv t$.

Undefinierte Terme:

Terme der definierten Sorte, die man **nicht in eine Normalform** umformen kann, werden als **undefiniert** angesehen. Sie modellieren eine **Fehlersituation**, z. B. pop (createStack)

Für manche **Projektionen** gibt es nicht zu jedem Term in Normalform ein anwendbares Axiom; dies modelliert auch **Fehlersituationen**, z. B. top (createStack)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 320a

Ziele:

Reduktion von Termen auf ihre Normalform

in der Vorlesung:

- Reduzierbarkeit auf Normalform durch strukturelle Induktion zeigen
- Undefinierte Terme erläutern

Verständnisfragen:

- Gibt es undefinierte Terme in der Algebra Bool?

Anwendungen algebraischer Spezifikationen: Eigenschaften aus den Axiomen erkennen

Beispiel: Keller

1. K3: pop (push (k, t)) -> k

Keller-Prinzip: zuletzt eingefügtes Element wird als erstes wieder entfernt (last-in-first-out, LIFO)

2. top: Keller -> Element
   K4: top (push (k, t)) -> t

top ist die einzige Operation, die Keller-Elemente liefert:
Nur auf das zuletzt eingefügte, nicht wieder entfernte Element kann **zugegriffen** werden.

3. push (.... push (createStack, n_1) , ...), n_m), mit $m \geq 0$
   K3: pop (push (k, t)) -> k

Zählt man in einem Term von innen nach außen die push-Operationen positiv und die pop-Operationen negativ, und ist der Wert immer nicht-negativ, so ergibt sich die **Anzahl der Elemente im Keller**, andernfalls ist der Term undefiniert.
Begründung: Rückführung auf Normalform, eine push-Operation für jedes Element im Keller.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 321

Ziele:

Axiome spezifizieren Eigenschaften

in der Vorlesung:

- Die drei Beispiele erläutern
- Über Keller nachdenken, ohne sie zu implementieren

Spezifikation um Operationen erweitern

Erweitere die Keller-Spezifikation um eine **Operation size**.
Sie soll die **Anzahl der Elemente im Keller** liefern.

1. Operation **size in die Signatur einfügen:**
   size: Keller -> NAT
2. Ergebnis-Sorte **NAT zu den Sorten zufügen**:
   S = {Keller, Element, BOOL, NAT}
3. **Axiome zufügen**, so dass size für jeden Keller-Wert definiert ist:
   K7: size (createStack) -> null
   K8: size (push (k, t)) -> succ (size (k))
4. Weil in der **Normalform** nur createStack und push vorkommen, braucht size nur für solche Terme definiert zu werden.

Dabei wird vorausgesetzt, dass folgende Algebra bekannt ist:
Sorten: S = {NAT}
Operationen: null: -> NAT, succ: NAT -> NAT
(succ (n) modelliert den Nachfolger von n, also n + 1.)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 322

Ziele:

Operationen und Axiome entwerfen

in der Vorlesung:

Schritte zur Erweiterung der Spezifikation zeigen

Verständnisfragen:

Erweitern Sie die Spezifikation um eine Operation, die 2 Elemente einfügt.

Realisierung der Spezifikation durch eine konkrete Algebra

Beispiel: eine Realisierung von Kellern durch **Funktionen auf Folgen** von natürlichen Zahlen:

Zuordnung der Sorten:

konkret	**abstrakt**
Bool	BOOL
$\mathbb{N}_0$	Element
N-Folge = $\mathbb{N}^*$	Keller

Signatur und **Zuordnung von Funktionen**

konkret			**abstrakt**
newFolge:		-> N-Folge	createStack
append:	N-Folge x $\mathbb{N}_0$	-> N-Folge	push
remove:	N-Folge	-> N-Folge	pop
last:	N-Folge	-> $\mathbb{N}$	top
noElem:	N-Folge	-> Bool	empty

Definition der Funktionen

newFolge( )	-> ()
append ((a_1, ..., a_n), x)	-> (a_1, ..., a_n, x)
remove ((a_1, ..., a_{n-1}, a_n))	-> (a_1, ..., a_{n-1})
last ((a_1, ..., a_n))	-> a_n
noElem (f)	-> f = ()

Gültigkeit der Axiome zeigen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 324

Ziele:

Beispiel für eine Realisierung

in der Vorlesung:

Funktionen erläutern

- Zuordnung erläutern
- Gültigkeit der Axiome zeigen

Übungsaufgaben:

Mit der Klasse Vector aus java.lang kann man Keller implementieren. Schlagen sie in der Dokumentation nach und begründen Sie, dass sich die Methoden addElement, removeElemenAt, lastElement, und size dafür eignen.

Keller in Algorithmen einsetzen

Aufgabe: Terme aus **Infixform in Postfixform** umwandeln

gegeben: Term t in Infixform, mit 2-stelligen Operatoren unterschiedlicher Präzedenz; (zunächst) ohne Klammern

gesucht: Term t in Postfixform

Eigenschaften der Aufgabe und der Lösung:

1. **Reihenfolge der Variablen und Konstanten bleibt unverändert**
2. **Variablen und Konstanten werden vor ihrem Operator ausgegeben**, also sofort
3. In der Infixform aufeinander folgende **Operatoren echt steigender Präzedenz** stehen in der Postfixform **in umgekehrter Reihenfolge**; also kellern.
4. **Operatorkeller enthält Operatoren echt steigender Präzedenz**. Es gilt die **Kellerinvariante KI**:
   Sei push (... push (CreateStack, opr_1), opr_2), ...) dann gilt
   Präzedenz (opr_i) < Präzedenz (opr_{i+1})

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 325

Ziele:

Kelleranwendung verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Eigenschaften
- Eigenschaften der Aufgabe verstehen, bevor sie gelöst wird
- Kellerinvariante: Eine Aussage, die für die Benutzung des Kellers immer gelten muss.

Verständnisfragen:

Wie werden bei diesen Regeln aufeinander folgende Operatoren gleicher Präzedenz behandelt?

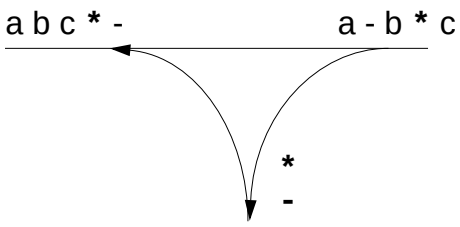
Algorithmus: Infix- in Postfixform wandeln

Die Eingabe enthält einen Term in Infixform;
die Ausgabe soll den Term in Postfixform enthalten

Variable: keller ∈ Keller; symbol ∈ Operator ∪ ElementarOperand

```
keller = createStack();
solange Eingabe nicht leer wiederhole                    {KI}
        lies symbol
        falls symbol ∈ ElementarOperand
                gib symbol aus
        falls symbol ∈ Operator                          {KI}
                solange  not empty (keller) ∧
                         Präzedenz (top (keller)) ≥ Präzedenz (symbol)
                wiederhole                               {KI}
                         gib top (keller) aus;
                         keller = pop (keller);
                keller = push(keller, symbol);           {KI}

solange not empty (keller) wiederhole
        gib top(keller) aus;
        keller = pop(keller);
```



An den Stellen {KI} gilt die Kellerinvariante.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 326

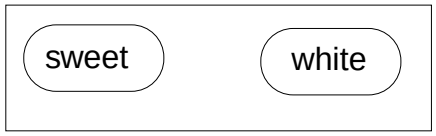
Ziele:

Benutzung der Kelleroperationen verstehen

in der Vorlesung:

- Algorithmus erläutern
- Graphik erläutern
- Gültigkeit der Kellerinvariante zeigen

Abstrakte Algebra für Teilaspekt des Getränkeautomaten



Knöpfe des Getränkeautomaten
zur Auswahl von Zutaten

Signatur $\Sigma = (S, F)$;

Sorten S := {Add, Choice}

Operationen F:

sweet:	-> Add
white:	-> Add
noChoice:	-> Choice
press: Add x Choice	-> Choice

Die Sorte **Choice** modelliert die Auswahl;
Add ist eine Hilfssorte

Bedeutung der Axiome:

Q_1: Knopf nocheinmal drücken macht Auswahl rückgängig.

Q_2: Es ist egal, in welcher Reihenfolge die Knöpfe gedrückt werden.

Axiome Q: für alle a der Sorte Add und
für alle c der Sorte Choice gilt:

Q_1: press (a, press (a, c)) -> c

Q_2: press (sweet, press (white, c)) ->
press (white, press (sweet, c))

Beispiel-Terme: press (white, noChoice)
press (sweet, press (white, press (sweet, noChoice)))

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 326b

Ziele:

Abfolge von Bedienoperationen modellieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- den beiden Sorten,
- den Axiomen: sie identifizieren Terme gleicher Bedeutung;
- der Bedeutung der Axiome

Übungsaufgaben:

Untersuchen und erläutern Sie

- Alternativen zu dieser Algebra;
- Algebren zur Modellierung von Knöpfen, die nur alternative betätigt werden können.

Verständnisfragen:

Begründen Sie die Bedeutung der Axiome anhand von Termen.

4 Logik
4.1 Aussagenlogik

Kalkül zum **logischen Schließen**. Grundlagen: Aristoteles 384 - 322 v. Chr.

Aussagen: Sätze, die prinzipiell als wahr oder falsch angesehen werden können.
z. B.: „Es regnet.“, „Die Straße ist nass.“
aber „Dieser Satz ist falsch.“ ist in sich widersprüchlich, ist keine Aussage.

Junktoren verknüpfen Aussagen: „Es regnet nicht, **oder** die Straße ist nass.“

Aussagenlogische Formeln als Sätze einer formale Sprache:
z. B. regen $\rightarrow$ straßeNass $\leftrightarrow$ $\neg$ regen $\vee$ straßeNass

Belegung der Aussagen mit **Wahrheitswerten**: f w f w

Interpretation der Formel liefert Wahrheitswert: w w w w

Formales Schließen im Gegensatz zur empirischen Beurteilung, z. B. ob „die Straße nass ist.“

Aus „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ **und** „Es regnet.“ **folgt** „Die Straße ist nass.“

Aussagen in der **Spezifikation**, in der **Modellierung** von Aufgaben

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 401

Ziele:
Einführung

in der Vorlesung:
Begriffe erläutern

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Vorschau auf Begriffe

- **Aussagenlogische Formeln** definiert durch **Signatur der booleschen Algebra**
- **Belegung von Variablen** mit Wahrheitswerten
- **Interpretation** aussagenlogischer Formeln
- **Gesetze der booleschen Algebra** zur Umformung von Formeln
- **erfüllbare** und **allgemeingültige** Formeln
- **logischer Schluss:** Folgerung aus einigen Annahmen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 402

Ziele:
Übersicht

in der Vorlesung:
Zusammenhang der Begriffe zeigen

Beispiel: Aussagenlogik in der Spezifikation

Unfall durch fehlerhafte Spezifikation:

Airbus A320, Warschau (1993). Der zuständige Rechner blockiert bei der Landung die Aktivierung von Schubumkehr und Störklappen, wodurch das Flugzeug über das Landebahnende hinausschießt. Es herrschen starker Wind von schräg hinten und Aquaplaning auf der Landebahn.

Beabsichtigte Spezifikation der Störklappenfreigabe:

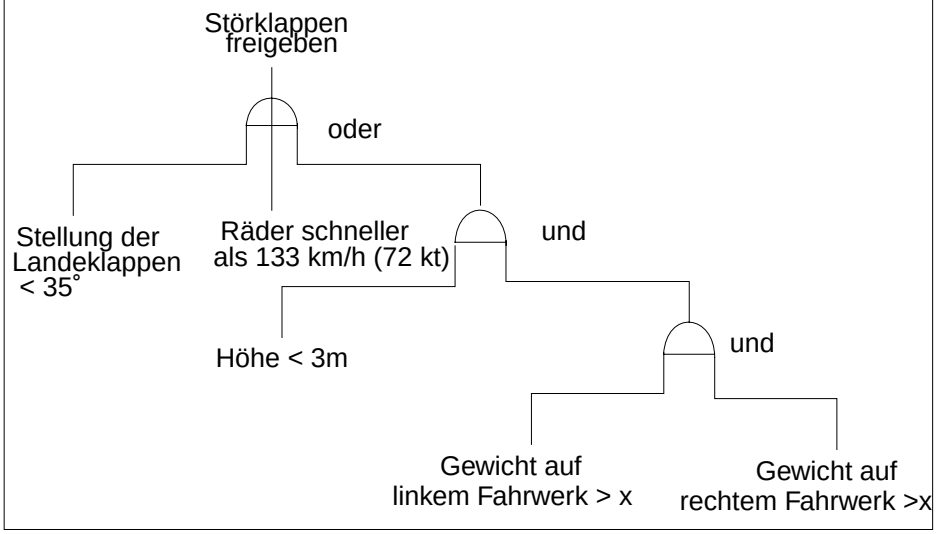
Die Störklappen dürfen benutzt werden

- im Reise- und Sinkflug (Bremswirkung)
- nach der Landung (Vernichtung des Auftriebes und Bremswirkung)

Sie dürfen nicht benutzt werden

- im Endanflug (gefährlicher Auftriebsverlust)

Tatsächliche Spezifikation der Störklappenfreigabe:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 403

Ziele:

Einfaches Beispiel für verknüpfte Aussagen

in der Vorlesung:

- Begründung der Spezifikation
- Erläuterung der Unfallursache

Verständnisfragen:

Schlagen Sie eine Korrektur der Spezifikation vor.

Aussagenlogische Formeln

Aussagenlogische Formeln sind korrekte Terme mit Variablen zur Signatur der booleschen Algebra:

false:	-> Bool	falsch, f
true:	-> Bool	wahr, w
$\wedge$: Bool x Bool	-> Bool	**Konjunktion**
$\vee$: Bool x Bool	-> Bool	**Disjunktion**
$\neg$: Bool	-> Bool	**Negation**

Erweiterung:

$\rightarrow$: Bool x Bool	-> Bool	**Implikation** $p \rightarrow q$ für $\neg p \vee q$
$\leftrightarrow$: Bool x Bool	-> Bool	**Äquivalenz** $p \leftrightarrow q$ für $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Operatoren (**Junktoren**) in **fallender Präzedenz**: $\neg \ \wedge \ \vee \ \rightarrow \ \leftrightarrow$

Variable, sowie false und true (Konstante) sind **atomare Aussagen**,
die übrigen Formeln sind **zusammengesetzt**.

Für **Variable** schreiben wir meist kleine Buchstaben p, q, ...
für **allgemeine Formeln** große Buchstaben F, G, H, ...

Die Definition der **Struktur** der Formeln heißt **Syntax der Aussagenlogik**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 404

Ziele:

Syntax der Aussagenlogik

in der Vorlesung:

- Term: nur Struktur;
- Formel: Term plus Bedeutung durch Regeln der Interpretation
- Signatur bestimmt Struktur der Terme und Formeln
- Beispiele
- Präzedenz und Klammerung

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Interpretation aussagenlogischer Formeln

Eine **passende Belegung** ordnet allen Variablen, die in einer Menge von Formeln F vorkommen, jeweils einen Wahrheitswert w oder f (für wahr oder falsch) zu.
Die Belegung kann als Substitution angegeben werden, z.B. σ = [p / w, q / f].

Eine **Interpretation** $\Im_\sigma$ einer aussagenlogischen Formel F bildet F auf einen Wahrheitswert ab:

- Für **Variable** ist die Interpretation $\Im_\sigma$ durch die **Belegung** σ definiert.
- Für **zusammengesetzte Formeln** wird sie durch folgende **Wahrheitstafeln** erweitert:

$\Im$(false)=f
$\Im$(true)=w

$\Im$(F)	$\Im$(¬F)
w	f
f	w

$\Im$(F)	$\Im$(G)	$\Im$(F∧G)	$\Im$(F∨G)	$\Im$(F→ G)	$\Im$(F↔G)
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Eine Interpretation $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ für eine Formel F bestimmt einen **Wahrheitswert der Formel F:** $\Im_\sigma$(F)

Wenn $\Im_\sigma$(F) = w gilt, heißt $\Im_\sigma$ auch ein **Modell der Formel F.**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 405

Ziele:

Wahrheitswerte zu aussagenlogischen Formeln

in der Vorlesung:

- Belegung erläutern
- Wir gehen davon aus, dass wir passende Belegungen zu der Menge der Formeln wählen, die wir gerade untersuchen.
- logische Verknüpfungen zeigen
- Interpretation: Belegung plus Verknüpfungen
- Beispiele dazu
- Bei n Variablen 2 hoch n verschiedene Belegungen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Vorsicht beim Formalisieren umgangssprachlicher Aussagen

Vorsicht bei **Implikationen**; mit Belegungen prüfen, was gemeint ist:

1. **Wenn** es regnet, benutze ich den Schirm. regnet $\rightarrow$ schirm
2. Ich benutze den Schirm, **wenn** es regnet. regnet $\rightarrow$ schirm
3. Ich benutze den Schirm, **nur wenn** es regnet. schirm $\rightarrow$ regnet

„Oder“ kann fast immer in das **nicht-ausschließende** $\vee$ übersetzt werden:

4. Hast Du einen Euro oder zwei Fünfziger? euro $\vee$ zwei50er
5. Morgen fahre ich mit dem Zug oder mit dem Auto nach Berlin. zug $\vee$ auto
6. x ist kleiner y oder x ist gleich y. x<y $\vee$ x=y
7. Der Händler gibt Rabatt oder ein kostenloses Autoradio. $\neg$ (rabatt $\leftrightarrow$ radio)

Aussagen sind häufig **kontext-abhängig**:

8. Weil ich die GP-Klausur nicht bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin teil. $\neg$ gp-k1 $\wedge$ gp-k2
9. Weil ich die Modellierungsklausur bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin nicht teil. mod-k1 $\wedge \neg$ mod-k2

Klammern sind meist nur aus dem Kontext erkennbar:

10. Sie wollten nicht verlieren oder unentschieden spielen. $\neg$ (verlieren $\vee$ unentschieden)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 406

Ziele:

Sorgfältig formalisieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Aussagenlogische Formeln zu den Sätzen entwickeln
- Begründungen dazu.
- Vorsicht beim Übertragen von Umgangssprache in Formeln, insbesondere bei Klammerung und Implikation.

Erfüllbarkeit von Formeln

Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es
eine Interpretation $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gibt, so dass gilt $\Im_\sigma$ (F) = w,
sonst ist sie **widerspruchsvoll** (**unerfüllbar**), d.h.
für alle Interpretationen $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gilt $\Im_\sigma$ (F) = f.

z. B. $p \wedge q$ ist erfüllbar; $p \wedge \neg p$ ist widerspruchsvoll.

Eine Formel F heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn
für alle ihre Interpretationen $\Im_\sigma$ (F) = w gilt.

z. B. $p \vee \neg p$.

Eine Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg$ F widerspruchsvoll ist.

allgemein-gültig	erfüllbar aber nicht allgemeingültig	widerspruchs-voll
F		$\neg$ F

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 407

Ziele:

Begriffe zur Erfüllbarkeit verstehen

in der Vorlesung:

- Weitere Beispiele dazu
- Schematische Einteilung der Formelmengen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.1

Gesetze der booleschen Algebra

Zwei Formeln F, G sind **logisch äquivalent**, **F ≡ G**,
wenn sie **für alle Interpretationen** $\Im$ dasselbe Ergebnis haben: $\Im(F) = \Im(G)$

Für alle aussagenlogischen Fomeln X, Y, Z gelten folgende **logische Äquivalenzen**:

$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$	$(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Assoziativität
$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$	$X \vee Y \equiv Y \vee X$	Kommutativität
$X \wedge X \equiv X$	$X \vee X \equiv X$	Idempotenz
$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	Distributivität
$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$	$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$	Absorption
$X \wedge \text{false} \equiv \text{false}$ $X \wedge \text{true} \equiv X$	$X \vee \text{false} \equiv X$ $X \vee \text{true} \equiv \text{true}$	Neutrale Elemente
$X \wedge \neg X \equiv \text{false}$	$X \vee \neg X \equiv \text{true}$	Komplement
$\neg \neg X \equiv X$		Involution
$\neg (X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$	$\neg (X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$	De Morgan

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 408

Ziele:

Übersicht zu Rechenregeln

in der Vorlesung:

- Überprüfung von Gesetzen durch Wahrheitstafeln
- Anwenden von Gesetzen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 3.2

Umformen mit Gesetzen der booleschen Algebra

Beispiel:

$(A \vee \underline{\neg (B \wedge A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	De Morgan
$(A \vee \underline{(\neg B \vee \neg A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$\underline{(A \vee (\neg A \vee \neg B))} \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Assoziativität
$((\underline{A \vee \neg A}) \vee \neg B) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Komplement
$(\underline{true \vee \neg B}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{\neg B \vee true}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Neutrale Elemente
$\underline{true \wedge (C \vee (D \vee C))} \equiv$	Kommutativität
$\underline{(C \vee (D \vee C)) \wedge true} \equiv$	Neutrale Elemente
$(C \vee (\underline{D \vee C})) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{C \vee (C \vee D)}) \equiv$	Assoziativität
$((\underline{C \vee C}) \vee D) \equiv$	Idempotenz
$C \vee D$	

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 409

Ziele:

Anwenden der Gesetze üben

in der Vorlesung:

- Schrittweise umformen mit Angabe der Teilformel und des Gesetzes, das darauf angewandt wird.
- Hier wird sehr ausführlich auch jeder kleine Schritt angegeben.
- Meist fasst man mehrere Schritte zusammen.
- **jeder Schritt einzeln (PDF)**

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 3.2

Logischer Schluss

Sei A eine Menge von Formeln und F eine Formel.
Wenn für **alle Interpretationen** $\Im$, die alle Formeln in A erfüllen, auch $\Im$ (F) gilt, dann sagen wir

„F folgt semantisch aus A“ $A \models F$

$A \models F$ heißt auch **logischer Schluss**,
A **Annahme** oder Antezedent, F **Folgerung** oder Konsequenz.

Die **Korrektheit eines logischen Schlusses** $A \models F$ mit $A = \{A_1, ..., A_n\}$ kann man prüfen:

a. durch Prüfen aller Interpretationen, die alle Formeln in A erfüllen

b. durch Wiederspruchsbeweis: $\mathbf{A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge \neg F}$ muss **widerspruchsvoll** sein.

Beweise werden aus logischen Schlüssen aufgebaut.

Beispiel:

U: Wenn alle Menschen gleich sind, gibt es keine Privilegien.

V: Es gibt Privilegien.

W: Nicht alle Menschen sind gleich.

nachweisen: $\mathbf{\{ U, V \} \models W}$ ist ein **korrekter logischer Schluss**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 410

Ziele:

Grundbegriff des logischen Schlusses verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele für logische Schlüsse zeigen
- Unterscheiden: logischer Schluss A |= F und aussagenlogische Formel A -> F

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.1.2

Übungsaufgaben:

Mit logischen Aussagen Eigenschaften des Getränkeautomaten, seiner Bedienung und seiner Zustände beschreiben.
Prüfen, ob die Aussagen erfüllbar sind.

4.2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen**, **Variablen**, **Junktoren.** Zusätzliche Konzepte:

- A = (τ, Σ) ist die so genannte **Termalgebra** (mit Variablen, ohne Axiome) mit Signatur Σ = ({T}, F), wobei T die Sorte „Term“ ist und alle Operationen $f \in F$ von der Form $f: T^n \rightarrow T$ sind. **Terme** sind die korrekten Terme bzgl. dieser Termalgebra.
- **n-stellige Prädikate** sind Operationen $P: T^n \rightarrow BOOL$. In einer Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen,
  z. B. „x ist eine Katze“ bzw. als Formel: istKatze(x)
  teilt(a,b), größterGemeinsamerTeiler(a, b, g)
- **Quantoren** „**für alle x gilt** α“ und „**es gibt ein x, so dass** α **gilt**“
  in Symbolen: $\forall \mathbf{x}\alpha$ bzw. $\exists \mathbf{x}\alpha$
  Beispiel: $\forall x$ (esIstNacht $\wedge$ istKatze(x) $\rightarrow$ istGrau(x));
  in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau.“

Schon **zur Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte **der Prädikatenlogik**,

z. B. größter gemeinsamer Teiler:

gegeben:	$a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$;
gesucht:	größter gemeinsamer Teiler g von a und b, d. h.
	teilt(g, a) $\wedge$ teilt(g, b) $\wedge$ ($\forall$h (teilt(h, a) $\wedge$ teilt(h, b) $\rightarrow$ h $\leq$ g))

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 421

Ziele:

Motivation der Prädikatenlogik

in der Vorlesung:

- Parametrisierung von Aussagen verdeutlichen
- Prädikate und Relationen
- Quantoren intuitiv
- Einsatz in der Modellierung

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

Warum kann man einfache Aufgaben für algorithmische Berechnungen nicht mit Aussagenlogik modellieren?

Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik
  Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, widerspruchsvoll**:
  wie in der Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in der Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

Ziele:
Übersicht

in der Vorlesung:
Vergleich mit Aussagenlogik

Prädikatenlogische Formeln

Prädikatenlogische Formeln (PL-Formeln) werden induktiv wie folgt definiert:

1. **Primformeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form **$P(t_1, ..., t_n)$ oder** Gleichungen in der Form **$t_1 = t_2$.**
   Dabei ist **P** ein n-stelliges Prädikatsymbol und die t_i sind Terme der Termalgebra.
   0-stellige Prädikatsymbole entsprechen den atomaren **Aussagen der Aussagenlogik.**
2. **logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\neg\alpha \quad \alpha \wedge \beta \quad \alpha \vee \beta$
   sowie $\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \leftrightarrow \beta$ **als Abkürzungen**
   mit prädikatenlogischen Formeln α und β
3. der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$ bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\forall \mathbf{x}\ \alpha$ und $\exists \mathbf{x}\ \alpha$
   mit der prädikatenlogischen Formel α; sie definieren die Variable x

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

Quantoren haben die gleiche **Präzedenz** wie $\neg$, also höhere als $\wedge$.

Beispiele:

$\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h\ (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow \leq (h, g))$ (siehe Folie 4.21)

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((R(x, y) \wedge R(x,z)) \rightarrow y = z)$ „R ist eine Funktion“

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 423

Ziele:

Notation und Struktur

in der Vorlesung:

- Beispiele
- Struktur an Bäumen erläutern
- Signatur explizit machen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Zeigen Sie, dass die Formeln auf Folie Mod-4.21 syntaktisch korrekt sind.
- Zu welchen Signaturen gehören ihre Terme?

Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur Σ wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe**: **Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**. Nur solche Variablen dürfen quantifiziert werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 424

Ziele:

PL Formeln in der Praxis

in der Vorlesung:

- Anmerkungen erläutern
- PL erster Stufe abgrenzen

nachlesen:

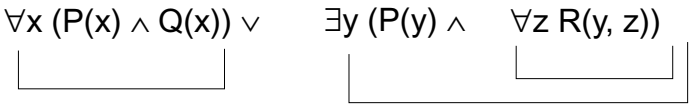
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Vorkommen von Variablen

Wir sagen: (Eine Variable mit Namen) **x kommt in einer PL-Formel** α **vor**, wenn sie in einer Primformel und dort in einem Term vorkommt.

Für eine PL-Formel der Form $\forall x\ \alpha$ oder $\exists x\ \alpha$ ist α der **Wirkungsbereich (für x) des Quantors**. x ist der **Name der Variablen des Quantors**.

Beispiel:



Quantoren mit ihrenWirkungsbereichen

Anmerkungen:

- Eine Variable hat einen Namen; **mehrere Variable können den gleichen Namen haben**.
- Ein Quantor definiert eine Variable, z. B. $\forall x\ \alpha$ definiert (eine Variable mit Namen) x. Ihr **Name kann im Wirkungsbereich (auch mehrfach) vorkommen**.
- **Wirkungsbereiche** von Quantoren können **geschachtelt** sein, sogar mit (verschiedenen) Variablen, die **dieselben Namen** haben.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 425

Ziele:

Bindung von Namen verstehen

in der Vorlesung:

- Wirkungsbereiche erläutern, und an Bäumen zeigen
- Variablendefinition und ihre Anwendungen
- Unterschied: Variable, ihr Name, dessen Vorkommen in einer Formel
- Vergleich mit Variablendeklarationen in Programmen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Freie und gebundene Variable

(Ein Vorkommen von) **x** in einer Formel α **heißt frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich für x eines Quantors liegt.

Ein **Quantor** $\forall$**x** α **bzw.** $\exists$**x** α **bindet** alle (Vorkommen von) x, die frei sind in α. (Das Vorkommen von) x heißt dann **gebunden**.

Beispiel: Formel α

$$R(y) \wedge \exists y\,(P(y, x) \vee Q(y, z))$$

freie Vorkommen

gebundene Vorkommen

In α gibt es 3 freie Variable; sie haben die Namen y, x, z.

2 Variable haben den Namen y;
eine kommt frei vor in R(y), die andere kommt 2 mal gebunden in α vor.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 426

Ziele:

Freie Variable erkennen

in der Vorlesung:

- Variable sind frei in Bezug auf eine (Teil-)Formel,
- weiter außen werden sie an eine Bedeutung gebunden.

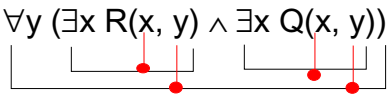
nachlesen:

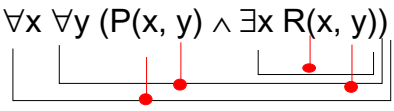
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Umbenennung von Variablen

In einer Formel können mehrere Vorkommen von Quantoren **verschiedene Variable mit gleichem Namen** einführen und in ihrem Wirkungsbereich binden:

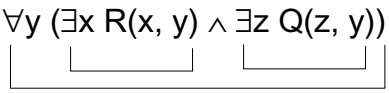
Beispiele:

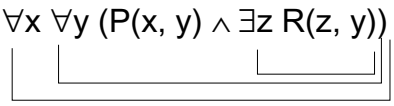




Umbenennung: In einer Formel kann man **alle (gebundenen) Vorkommen des Namens x der Variablen eines Quantors in dessen Wirkungsbereich durch einen neuen Namen z ersetzen**, der sonst nicht in der Formel vorkommt. Die Bedeutung der Formel, (genauer: semantische Aussagen über sie), ändert sich dadurch nicht.

Beispiele von oben:





Damit kann man erreichen, dass **verschiedene Variable verschiedene Namen** haben.
Wir sagen dann: Die Variablen der Formel sind **konsistent umbenannt**.
Formeln, in denen **alle Variablen verschiedene Namen** haben sind meist **besser lesbar**.
Manche **Definitionen sind einfacher** für konsistent umbenannte Formeln.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 427

Ziele:

Konsistente Umbenennung verstehen

in der Vorlesung:

- Anwendungen ihren Definitionen zuordnen.
- Wenn in geschachtelten Wirkungsbereichen die Variablen der Quantoren dieselben Namen haben, dann ist im inneren Wirkungsbereich die äußere Variable verdeckt.
- Konsistente Umbenennung beachtet Bindungen, Substitution von Variablen aber nicht.
- Vergleich mit Programmiersprachen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Geben Sie ein Beispiel, wo eine unzulässige Umbenennung in einen schon verwendeten Variablennamen Bindungen verändert.

Interpretation zu prädikatenlogischer Formel

Einer prädikatenlogischen Formel α wird durch eine **Interpretation** $\Im(\alpha)$ **Bedeutung zugeordnet,** sodass man ihren Wahrheitswert (w oder f) berechnen kann.

Eine **Interpretation** $\Im$ wird bestimmt durch

- einen **Individuenbereich U,** der nicht leer ist (auch Universum genannt). Aus U stammen die Werte der Variablen und Terme.
- eine **Abbildung der Funktions- und Prädikatsymbole** auf dazu passende konkrete Funktionen und Relationen, notiert als z. B. $\Im(h)$, $\Im(P)$
- eine **Belegung der freien Variablen mit Werten aus U**, notiert z. B. $\Im(x)$.
- die Interpretation der Junktoren und Quantoren (definiert auf Folie 4.31)

Bemerkungen:

- In der Prädikatenlogik enthält der **Individuenbereich U alle Individuen** - **auch verschiedenartige** - die für die Interpretation benötigt werden. Er ist **nicht in Wertebereiche gleichartiger Individuen** strukturiert (wie in Kapitel 2).
- **Der Sorte T** wird deshalb **der ganze Individuenbereich U** zugeordnet.
- Eine **Interpretation** wird immer **passend zu einer Menge prädikatenlogischer Formeln** definiert. Nur darin vorkommende Funktionen, Prädikate und Variable interessieren.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 428

Ziele:

Interpretation als Zuordnung verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele für Individuenbereiche U
- Vergleich mit Wertebereichen aus Abschnitt 2
- Beispiel von Mod-3.26

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel $\alpha = (\forall x\, P(x, h(x))) \wedge Q(g(a, z))$ ist folgendes $\Im$ eine passende Interpretation:

- $U := \mathbb{N}$
- $\Im(P) := \{ (m, n) \mid m, n \in U \text{ und } m < n \}$
- $\Im(Q) := \{ n \mid n \in U \text{ und } n \text{ ist Primzahl} \}$
- $\Im(h)$ ist die Nachfolgerfunktion auf U, also $\Im(h)(n) = n + 1$
- $\Im(g)$ ist die Additionsfunktion auf U also $\Im(g)(m, n) = m + n$
- $\Im(a) := 2$ (a ist eine Konstante, d.h. eine 0-stellige Funktion, $2 \in U$)
- $\Im(z) := n$ (z ist eine freie Variable, $n \in U$)

Bemerkungen:

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von $\Im$ zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten (Folie 4.31).

Das Beispiel stammt aus

U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 429

Ziele:

Konkretes Beispiel verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiel erläutern
- Andere Funktionen einsetzen

Verständnisfragen:

Variieren Sie das Beispiel mit anderen Funktionen und Prädikaten.

Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei α eine prädikatenlogische Formel und $\mathfrak{I}$ eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert $\mathfrak{I}(\alpha)$,** indem man $\mathfrak{I}$ **rekursiv anwendet** auf die Teile von α:

- die **Prädikatsymbole und deren Terme**,
- die **Funktionssymbole und deren Terme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 430

Ziele:

Interpretation auf Teile einer PL-Formel anwenden

in der Vorlesung:

- Übersicht geben

Interpretation von PL-Formeln (vollständige Definition)

Die Interpretation der Symbole wird auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind, erweitert:

Für jeden Term $\mathbf{h(t_1, ..., t_n)}$ wird definiert: $\Im(h\ (t_1, ..., t_n)) = \Im(h)(\Im(t_1), ..., \Im(t_n))$.

Für Formeln gilt (Definition durch Induktion über den Aufbau der prädikatenlogischen Formeln):

1. $\Im(P\ (t_1, ..., t_n)) = w$ genau dann, wenn $(\Im(t_1), ..., \Im(t_n)) \in \Im(P)$
2. $\Im(t_1 = t_2) = w$ genau dann, wenn $\Im(t_1) = \Im(t_2)$
3. $\Im(\neg\alpha) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = f$
4. $\Im(\alpha \wedge \beta) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = w$ **und** $\Im(\beta) = w$
5. $\Im(\alpha \vee \beta) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = w$ **oder** $\Im(\beta) = w$
6. $\Im(\forall x\alpha) = w$ genau dann, wenn **für jeden Wert d** $\in$ **U** gilt $\Im_{[x/d]}(\alpha) = w$
7. $\Im(\exists x\alpha) = w$ genau dann, wenn es **einen Wert d** $\in$ **U gibt** mit $\Im_{[x/d]}(\alpha) = w$

Dabei ordnet $\Im_{[x/d]}(\alpha)$ in α der Variablen **x** den Wert **d** zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretation $\Im$ überein.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 431

Ziele:

Exakte Definition der Interpretation verstehen

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel für Interpretation einer Formel

Formel α:

$R \wedge \forall x \, \forall y \, P(x, y)$

Interpretation $\Im$:

$U = \{ 1, 2, 3 \}$

$\Im(P) = \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$

$\Im(R) = w$

Interpretation $\Im$ rekursiv gemäß Mod-4.31 angewandt:

Nr.:		$\Im(R \wedge \forall x \, \forall y \, P(x, y))$
4	=	$\Im(R)$ und $\Im(\forall x \, \forall y \, P(x, y))$
$\Im$,6,6	=	w und für jedes d, e $\in$ U gilt $\Im_{[x/d, y/e]}(P(x, y))$
1	=	w und für jedes d, e $\in$ U gilt $(\Im_{[x/d, y/e]}(x), \Im_{[x/d, y/e]}(y)) \in \Im_{[x/d, y/e]}(P)$
$\Im$	=	w und für jedes d, e $\in \{ 1, 2, 3 \}$ gilt $(d, e) \in \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$
	=	w und w
	=	w

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 432

Ziele:
Beispiel zu Mod-3.27

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 2.5

Elementare Interpretationen

Wir betrachten für die Beispiele A bis G eine Interpretation $\Im$ mit Individuenbereich U = $\mathbb{N}$.

a. freie Variable: $\Im(u) = 1 \in U$, $\Im(v) = 2 \in U$ (bestimmte Elemente von U)

b. 0-stellige Prädikate: $\Im(A) = w$ oder $\Im(A) = f$ (boolesche Variable)

c. 1-stellige Prädikate: $\Im(P) = M := \{1, 2, 3\} \subseteq U$ (Teilmenge von U)

d. 2-stellige Prädikate: $\Im(Q) = R := \{(1, 2), (2, 2)\} \subseteq U \times U$ (Relation auf U)

A. $\Im(P(u)) = w$ gdw $\Im(u) \in \Im(P)$, d. h. $1 \in M$

B. $\Im(Q(u, v)) = w$ gdw $(\Im(u), \Im(v)) \in \Im(Q)$, d. h. $(1, 2) \in R$

C. $\Im(\forall x\, P(x)) = w$ gdw (Für alle $d \in U$ gilt: $d \in M$) = f, d. h. $M \neq U$

D. $\Im(\exists x\, P(x)) = w$ gdw Es existiert $d \in U$ mit $d \in M$, $M \neq \emptyset$

E. $\Im(\forall x\, Q(x, x)) = w$ gdw (Für alle $d \in U$ gilt: $(d, d) \in R$) = f, d. h. R ist nicht reflexiv

F. $\Im(\exists x\, Q(x, x)) = w$ gdw Es gibt ein $d \in U$ mit $(d, d) \in R$, d. h. R ist nicht irreflexiv

G. $\Im(\forall x\, \forall y\, (Q(x,y) \wedge Q(y, x) \rightarrow x = y)) = w$
gdw Für alle $d, e \in U$ gilt: aus $(d, e) \in R$ und $(e, d) \in R$ folgt $d = e$, d. h. R ist antisymmetrisch

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 433

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beschränkung von Wertebereichen

In der **Prädikatenlogik** kann die **Interpretation von Variablen** Werte aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen (im Unterschied zu einem **Wertebereich**).
Deshalb muss eine **Einschränkung explizit als Relation** formuliert werden.

Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation $\rightarrow$:
„Für alle $m \in U$ gilt: **aus** $m \in M$ **folgt** Q(m, n)“ oder abgekürzt „$\forall m \in M$: Q(m, n)“

als PL-Formel: $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, y))$

	ausführliche Notation:	abkürzende Notation:
Beispiele:	Für alle $i \in U$ gilt: aus $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ folgt $b_i = a_i^2$	$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$: $b_i = a_i^2$
	Für alle $k \in U$ gilt: aus $k \in \mathbb{N}$ folgt $a + k \geq a$	$\forall k \in \mathbb{N}$: $a + k \geq a$

Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion $\wedge$:
„Es gibt ein $m \in U$, sodass $m \in M$ **und** Q(m, n) “ oder abgekürzt „$\exists m \in M$: Q(m, n)“

PL-Formel:	$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x, y))$	
Beispiele:	Es gibt ein $k \in U$, sodass $k \in \mathbb{N}$ **und** $a * k = b$	$\exists k \in \mathbb{N}$: $a * k = b$
	Es gibt ein $i \in U$, sodass $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ **und** $a_i = x$	$\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}$: $a_i = x$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 434

Ziele:

Prädikate präzisieren Wertebereiche

in der Vorlesung:

- Begründung der Implikation und der Konjunktion
- Erläuterung der Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (1)

Die Variablen in Gleichungen konkreter Algebren sind durch Allquantoren gebunden:

Axiom K3: pop (push (k, x)) –>k (in der abstrakten Keller-Algebra)

Gleichung: $\forall a \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}$: remove (append (a, n)) = a (konkrete Algebra)

PL-Formel: $\forall k \, \forall x \, (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h\,(\,g\,(k, x)) = k)$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$, $\Im(S) = \mathbb{N}$, $\Im(P) = \mathbb{N}^*$

$\Im(h)$ = remove: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$,

$\Im(g)$ = append: $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

Es gilt: $\Im(\forall k \, \forall x \, (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(\,g\,(k, x)) = k))) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \Im_{\mathbf{[k/a,\ x/n]}}(P(k) \wedge S(x) \rightarrow h\,(\,g\,(k, x)) = k) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$: Aus $a \in \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt: remove (append (a, n)) = a

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$: remove (append (a, n))= a

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (2)

Aus der Analysis:

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$, heißt Nullfolge, wenn gilt

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 < n : | a_n | < \varepsilon$

Dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!

PL-Formel α: $\forall x(P_1(x) \to \exists y(P_2(y) \wedge \forall z(P_2(z) \wedge Q(y, z)) \to Q(h(z), x))))$

Interpretation: $U = \mathbb{R}$, $\Im(P_1) = \mathbb{R}^+$, $\Im(P_2) = \mathbb{N}$,

$\Im(Q) = \{ (r, s) \mid (r, s) \in \mathbb{R}^+ x \mathbb{R}^+ \text{und } r < s \}$,

$\Im(h) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\Im(h)(i) = | a_i |$

Es gilt: $\Im(\alpha) = w$ gdw a_n ist eine Nullfolge

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (3)

Aus der Informatik:

Eine Folge $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^k$ heißt monoton wachsend, wenn gilt

$\forall\, i \in \{1, ..., k\}$: $\forall\, j \in \{1, ..., k\}$ mit $i \leq j$ gilt $a_i \leq a_j$

PL-Formel β : $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow Q(h(x), h(y))))$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^k \cup \{1, ..., k\}$, $\Im(P) = \{1, ..., k\}$,

$\Im(Q) = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

$\Im(h) : \{1, ..., k\} \rightarrow \mathbb{N}$, $\Im(h)(i) = a_i$

Es gilt: $\Im(\beta) = w$ gdw a_n ist monoton wachsend

Was bedeutet $\Im(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (Q(h(x), h(y)) \wedge (h(x) = h(y) \rightarrow Q(x, y))))) = w$

mit $\Im(x) = i$, $i \in \{1, ..., k\}$, bei sonst unveränderter Interpretation?

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 437

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

gegeben:

Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ eines n * n Schachbrettes

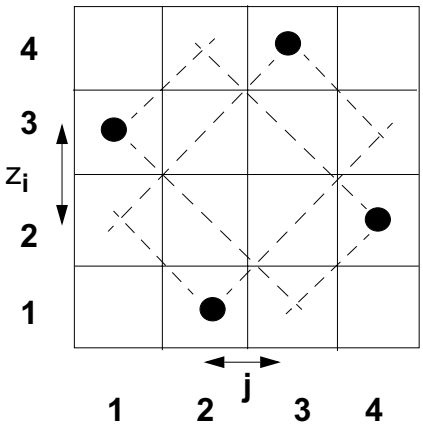
gesucht:

Menge P zulässiger Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:

Sei Index := {1, ..., n}

$P := \{ p \mid p = (z_1, ..., z_n) \in Index^n \wedge \text{zulässig } (p) \}$

z_i gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte i an.



Dabei bedeutet

zulässig (p): $\forall\, i \in Index: \forall\, j \in Index: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge | z_i - z_j | \neq | i - j |$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 438

Ziele:

Spezifikation einer Aufgabe

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.
Aber: Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.
Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**“ und „**allgemeingültig**“ für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation $\Im(\alpha)$ = w gilt, heißt $\Im$ auch ein **Modell der Formel** α**.**
- Eine Formel α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\Im$ gibt, so dass gilt $\Im(\alpha)$ = w, sonst ist sie **widerspruchsvoll**.
- Eine Formel α heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von α gilt $\Im$ (α) = w, sonst ist sie **falsifizierbar**.
- Eine Formel α ist genau dann **allgemeingültig, wenn** $\neg\ \alpha$ **widerspruchsvoll** ist.
- Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen: $\alpha \equiv \beta$,
  wenn sie für alle Interpretationen $\Im$ dasselbe Ergebnis haben: $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$
- Sei F eine Menge von Formeln und α eine Formel.
  Wenn für **alle Interpretationen** $\Im$, die alle Formeln in F erfüllen, auch $\Im$ (α) gilt,
  dann sagen wir**„**α **folgt semantisch aus F“** bzw. F |= α;
  F |= α heißt auch **logischer Schluss**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 439

Ziele:

Analoge Begriffe wie in der Aussagenlogik

in der Vorlesung:

- gleiche Definition der Begriffe
- Interpretation unterscheidet sich von der in der Aussagenlogik
- Die Menge der Interpretationen kann i.a. nicht überprüft werden.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien α und β beliebige prädikatenlogische Formel. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

1. **Negation:**

   $\neg\forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg\alpha$ $\qquad$ $\neg\exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg\alpha$

2. **Wirkungsbereich der Quantoren verändern:**
   Falls x in β nicht frei vorkommt, gilt

   $(\forall x\ \alpha) \wedge \beta \equiv \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\forall x\ \alpha) \vee \beta \equiv \forall x\ (\alpha \vee \beta)$

   $(\exists x\ \alpha) \wedge \beta \equiv \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha) \vee \beta \equiv \exists x\ (\alpha \vee \beta)$

   $\beta \equiv \exists x\ \beta$ $\qquad$ $\beta \equiv \forall x\ \beta$

3. **Quantoren zusammenfassen:**

   $(\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta) \equiv \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \equiv \exists x\ (\alpha \vee \beta)$

   Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:
   $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \not\equiv \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta) \not\equiv \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$

4. **Quantoren vertauschen:**

   $\forall x\ \forall y\ \alpha \equiv \forall y\ \forall x\ \alpha$ $\qquad$ $\exists x\ \exists y\ \alpha \equiv \exists y\ \exists x\ \alpha$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 440

Ziele:

Wichtige Äquivalenzen einprägen

in der Vorlesung:

- 1 - 4 begründen
- Eine Äquivalenz beweisen
- Beispiel für Umformungen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für Äquivalenzen

1. Negation:

		formal
	Alle haben den Schuss gehört.	$\forall x$ gehört(x)
negiert:	Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\exists x \neg$ gehört(x)
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg$ gehört(x)

$\neg \forall i \in$ Ind: $a_i < 10$

gdw $\neg \forall i\ (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$

gdw $\exists i \neg(\neg\ i \in \text{Ind} \vee a_i < 10)$

gdw $\exists i\ (\ i \in \text{Ind} \wedge \neg\ a_i < 10)$

gdw $\exists i \in$ Ind: $a_i \geq 10$

$(\exists\ x\ P(x)) \rightarrow P(y)$

$\equiv \neg(\exists\ x\ P(x)) \vee P(y)$

$\equiv (\forall\ x \neg P(x)) \vee P(y)$

$\equiv \forall\ x\ (\neg P(x) \vee P(y))$

$\equiv \forall\ x\ (P(x) \rightarrow P(y))$

2. Zusammenfassung von Quantoren:

Äquivalent:

$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \wedge (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$ gdw $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$

Nicht äquivalent, vielmehr gilt nur:
Aus $(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \vee (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$ **folgt** $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 441

Ziele:

Beispiele für Mod-3.32

in der Vorlesung:

- Schrittweise umformen
- weitere Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel für Umformungen

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

	$\underline{\neg(\exists x\ P(x, y) \vee \forall z\ Q(z))} \wedge \exists u\ f(a, u) = a$	DeMorgan
$\equiv$	$(\underline{\neg\exists x\ P(x, y)} \wedge \underline{\neg\forall z\ Q(z)}) \wedge \exists u\ f(a, u) = a$	Negation von Quantorformeln (x, z)
$\equiv$	$(\forall x\ \neg P(x, y) \wedge \exists z\ \neg Q(z)) \mathbin{\underline{\wedge}} \exists u\ f(a, u) = a$	Kommutativität
$\equiv$	$\underline{\exists u\ f(a, u) = a} \wedge (\underline{\forall x\ \neg P(x, y)} \wedge \exists z\ \neg Q(z))$	Wirkungsbereiche ausweiten (u, x)
$\equiv$	$\exists u\ (f(a, u) = a \mathbin{\underline{\wedge}} \forall x\ (\neg P(x, y) \mathbin{\underline{\wedge}} \exists z\ \neg Q(z)))$	Kommutativität (2 mal)
$\equiv$	$\exists u\ (\forall x\ (\underline{\exists z\ \neg Q(z)} \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereich ausweiten (z)
$\equiv$	$\exists u\ (\underline{\forall x\ \exists z\ (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y))} \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereiche ausweiten (x, z)
$\equiv$	$\underline{\exists \mathbf{u}\ \forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{z}}\ (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge f(a, u) = a)$	

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

Ziele:

Äquivalenzen anwenden

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Anwendungsstellen zeigen,
- **jeder Schritt einzeln (PDF)**

Normalformen

- **Definition:** Eine PL-Formel α ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen in α unmittelbar vor einer Primformel steht und α die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht enthält.

- **Definition:** Eine PL-Formel α ist in **pränexer Normalform (PNF)** genau dann, wenn sie von der Form $Q_1x_1\ Q_2x_2\ ...\ Q_nx_n\ \beta$ ist, wobei Q_i Quantoren sind und β keine Quantoren enthält.

- **Satz:** Zu jeder PL-Formel gibt es **logisch äquivalente Formeln** in Negationsnormalform bzw. in pränexer Normalform.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 443

Ziele:

Normalformen kennen

in der Vorlesung:

Begriffe erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Erzeugung der PNF

Die Erzeugung der pränexen Normalform geschieht in zwei Schritten:

1. Konsistente **Umbenennung** der Variablen (siehe Folie 4.27)
2. Quantoren nach links mit Hilfe der folgenden **Ersetzungsregeln** (Äquivalenzen):
   a. Ersetze $(\forall x\alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ (wegen (1) kommt x nicht frei in β vor)
   b. Ersetze $(\exists x\alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
   c. Ersetze $(\forall x\alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$
   d. Ersetze $(\exists x\alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$
   e. Ersetze $\neg\forall x\alpha$ durch $\exists x\neg\alpha$
   f. Ersetze $\neg\exists x\alpha$ durch $\forall x\neg\alpha$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 444

Ziele:
Regeln zur Erzeugung der PNF kennen

in der Vorlesung:
Am Beispiel erläutern

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Komplexität der Prädikatenlogik erster Stufe

- Es gibt für die Prädikatenlogik erster Stufe einen **vollständigen, korrekten Kalkül** zur Herleitung allgemeingültiger Formeln.
- Die Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**, d. h. es gibt kein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist.
- Die Prädikatenlogik ist **rekursiv aufzählbar**, d. h. es gibt ein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist, das aber im negativen Fall nicht notwendig terminiert.
- Die **natürlichen Zahlen** lassen sich in der Prädikatenlogik erster Stufe **nicht** modellieren.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 445

Ziele:
Grundsätzliche Aussagen über PL kennen

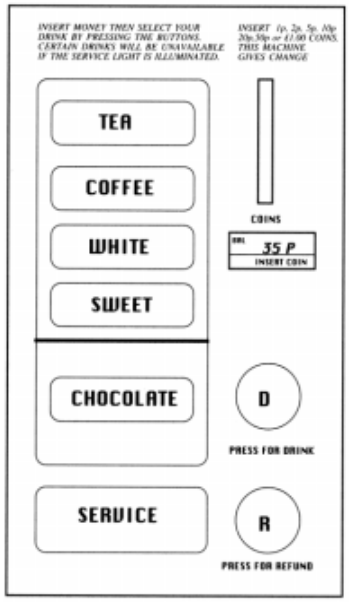
in der Vorlesung:
Aussagen erläutern

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationssprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet **Prädikatenlogik**.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine“ aus
Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff



Get_Drink

$\Delta Abs\_State\_Machine$
$choice? : \mathbb{P} Selection\_buttons$
$d! : Drink$
$Change! : \text{bag } British\_coin$

$choice? \in Drink$
$Value\ Balance \geq Prices\ choice?$
$\forall i : Recipe\ choice? \bullet count\ Stock\ i > 0$
$Cups > 0$
$\exists b : bag\ British\_coins \bullet (b \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ b + Prices\ choice?)$
$Balance' = [\![\,]\!]$
$Stock' \uplus \{i : Recipe\ choice? \bullet i \mapsto 1\} = Stock$
$Cups' = Cups - 1$
$Change! \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ Change! + Prices\ choice?$
$Takings' \uplus Change! = Takings$
$Prices' = Prices$
$Service\_light' = Service\_light$
$Report\_display' = insert\ coin$
$d! = choice?$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 446

Ziele:

Ausschnitt aus einem größeren Beispiel

in der Vorlesung:

Erläuterungen zur

- Sprache Z,
- zur gestellten Aufgabe,
- zum Ausschnit aus der Spezifikation

4.3 Verifikation von Aussagen über Algorithmen

Hoaresche Logik: Kalkül zum Beweisen von **Aussagen über Algorithmen und Programme**, Programm-**Verifikation**, [C.A.R. Hoare, 1969].

Statische Aussagen über Zustände (Werte von Variablen),
die der Algorithmus (das Programm) an bestimmten Stellen annehmen kann, z. B.
... {pegel < max} pegel := pegel + 1; ... {0<i ∧ i<10} a[i] := 42; ... {x = GGT};

Aussagen müssen beweisbar **für alle Ausführungen** des Algorithmus gelten. Im Gegensatz zum **dynamischen Testen**: Ausführen des Algorithmus für bestimmte Eingaben.

Schlussregeln für Anweisungformen erlauben logische Schlüsse über Anweisungen hinweg:
{pegel+1 ≤ max} pegel := pegel + 1; {pegel ≤ max} wegen Schlussregel für Zuweisungen

Verifikation beweist, dass

- an einer bestimmten Programmstelle eine Aussage über Zustände gilt,
- vor und nach Ausführung eines Programmstückes eine **Invariante** gilt,
- ein Algorithmus **aus jeder zulässigen Eingabe die geforderte Ausgabe** berechnet, z. B.
  { a, b ∈ ℕ } Euklidischer Algorithmus { x ist GGT von a, b }
- eine **Schleife terminiert.**

Ein **Algorithmus und dieAussagen dazu sollen zusammen konstruiert** werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 451

Ziele:

Bedeutung der Verifikation erkennen

in der Vorlesung:

- Ziele der Verifikation erläutern
- Man wählt die Aussagen, die man über den Algorithmus beweisen will, z.B. seine Spezifikation
- Nicht: "Der Algorithmus wird bewiesen."

nachlesen:

- C.A.R. Hoare: An Axiomatic Basis for Computer Programming, CACM 12(10), 1969
- D. Gries: The Science of Programming, Springer-Verlag, 1981

Vorschau auf Konzepte

Aussagen charakterisieren Zustände der Ausführung

Algorithmen in informeller Notation

Schlussregeln für Anweisungsformen anwenden

Invariante von Schleifen (und anderen Konstrukten)

Schlussketten über Anweisungen hinweg verifizieren Aussagen

Nachweis der **Terminierung von Schleifen**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 452

Ziele:
Eindruck von Begriffen bekommen

in der Vorlesung:
Anwendung der Begriffe wird an der nachfolgenden Folie gezeigt.

Beispiel zur Vorschau: Verifikation des Algorithmus ggT

Vorbedingung: x, y $\in \mathbb{N}$, d. h. x > 0, y > 0; sei G größter gemeinsame Teiler von x und y
Nachbedingung: a = G

Algorithmus mit { Aussagen über Variable }:

```
{ G ist ggT von x und y ∧ x>0 ∧ y>0 }
a := x; b := y;
{ INV: G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 }
solange a ≠ b wiederhole
   { INV ∧ a ≠ b }
   falls a > b :
         { G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 ∧ a>b } →
         { G ist ggT von a-b und b ∧ a-b>0 ∧ b>0 }
         a := a - b
         { INV }
   sonst
         { G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 ∧ b>a } →
         { G ist ggT von a und b-a ∧ a>0 ∧ b-a>0 }
         b := b - a
         { INV }
   { INV }
{ INV ∧ a = b } →
{ a = G }
```

Terminierung der Schleife:
- a+b fällt monoton
- a+b > 0 ist Invariante

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 453

Ziele:

Beispiel für eine Algorithmenverifikation

in der Vorlesung:

Hier nur ersten Eindruck vermitteln. Später Erläuterungen

- zur Konstruktionsidee,
- zur Rolle der Schleifeninvarianten,
- zur Anwendung der Alternativenregel,
- zu Anwendungen der Zuweisungsregel
- zum Terminierungsnachweis

Aussage charakterisiert Programmzustände

Eine **Aussage P** an einer **Stelle in einem Algorithmus** (Programm) vor oder nach einer Anweisung ... S_1 {P} S_2 ...
charakterisiert alle Zustände, die das Programm an dieser Stelle **bei irgendeiner Ausführung** annehmen kann. P wird über **Variable des Algorithmus** formuliert.

Z. B. ... { $0 \le i \wedge i < 10$ } a[i] := 42; ...
Bei jeder Ausführung liegt der Wert von i im angegebenen Intervall.
Eine Aussage über andere Variablen wird hier nicht gemacht.

Nur die **gerade interessierende Eigenschaften der Zustände** werden beschrieben.

Aussagen können unterschiedlich scharf formuliert werden:

{ f }	kein Zustand erfüllt P, Stelle nicht erreichbar
{ $0 \le i \wedge i < 2 \wedge a[i] > 0$ }	schärfer; evtl. weniger Zustände; schwieriger zu verifizieren
{ $0 \le i \wedge i < 2$ }	
{ $0 \le i \wedge i < 10$ }	
{ $0 \le i$ }	schwächer; evtl. mehr Zustände; leichter zu verifizieren
{ w }	beliebige Zustände erfüllen P

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 454

Ziele:

Beziehung zwischen Aussage und Zustäanden verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird gezeigt: Trade-off zwischen der Schärfe der Aussage, dem Nutzen der Aussage und der Schwierigkeit sie nachzuweisen.

Notation von Algorithmenelementen

Anweisungsform	Notation	Beispiel
Sequenz	Anweisung$_1$**;** Anweisung$_2$	**`a := x;`** **`b := y`**
Zuweisung	Variable **:=** Ausdruck	**`a := x`**
Alternative, zweiseitig	**falls** Bedingung **:** Anweisung$_1$ **sonst** Anweisung$_2$	**`falls a > b :`** **`a := a - b`** **`sonst b := b - a`**
bedingte Anweisung	**falls** Bedingung **:** Anweisung$_1$	**`falls a < 0 :`** **`a := - a`**
Aufruf eines Unteralgorithmus ua	ua()	**`berechneGgT()`**
Schleife	**solange** Bedingung **wiederhole** Anweisung	**`solange a≠b wiederhole`** **`falls a > b :`** ...

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 455

Ziele:

Einfache Notation von Algorithmen

in der Vorlesung:

6 Anweisungsformen und ihre Schreibweise erläutern

- Zuweisungszeichen := wie in Pascal (nicht wie in Java =),
- Einrückung ist wichtig, um die Struktur auszudrücken
- Verifikation von Aufrufen hier nur ohne Parameter,
- als Anweisung kann jede der 6 Formen - auch geschachtelt - eingesetzt werden,
- rekursive Definition von Anweisungsformen!

Verständnisfragen:

Zeigen Sie die Anwendung der Anweisungsformen am ggT-Algorithmus auf mod-3.9a

Vor- und Nachbedingung von Anweisungen

Aussage Q charakterisiert die Zustände, die eine Ausführung zwischen den Anweisungen A_1 und A_2 annehmen kann:

$$\{ P \} \; A_1 \; \{ Q \} \; A_2 \; \{ R \}$$

Q ist **Nachbedingung** von A_1 und **Vorbedingung** von A_2

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ `i := i + 1;` $\{ i \geq 0 \}$ `a [i] := k;` {...}

Zur Verifikation eines Algorithmus muss für jede Anweisung S ein Nachweis geführt werden:

{ Vorbedingung P } S { Nachbedingung Q }

nachweisen: Wenn vor der Ausführung der Anweisung S die Aussage P gilt, dann gilt Q nach der Ausführung von S, falls S terminiert.

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ `i := i + 1;` $\{i \geq 0\}$ mit Zuweisungsregel nachweisen

Die Aussagen werden entsprechend der **Struktur von S verknüpft**.
Für jede Anweisungsform wird eine spezielle **Schlussregel** angewandt.

Eine **Spezifikation liefert Vorbedingung und Nachbedingung** des gesamten Algorithmus:

gegeben:		*gesucht:*
Aussagen über die Eingabe		Aussagen über Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgabe
{ Vorbedingung }	Algorithmus	{ Nachbedingung }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 456

Ziele:

Von der Vor- zur Nachbedingung

in der Vorlesung:

- Zu jeder Anweisung ein Beiweisschritt
- Terminierung muss separat gezeigt werden

Zuweisungsregel

Hoare'scher Kalkül definiert **für jede Anweisungsform** eine **Schlussregel.**

Eine **Zuweisung** x := e wertet den Ausdruck e aus und weist das Ergebnis der Variablen x zu.

$$\{ P_{[x/e]} \}\ x := e\ \{ P \}$$

Wenn vor der Ausführung $\mathbf{P_{[x/e]}}$ gilt (P wobei x durch e substituiert ist),
gilt nach der Ausführung der Zuweisung P.

Beispiele: $\{a > 0\}$ x := a $\{x > 0\}$
$\{i + 1 > 0\}$ i := i + 1 $\{i > 0\}$

Wenn man zeigen will, dass **nach der Zuweisung eine Aussage P für x** gilt,
muss man zeigen, dass **vor der Zuweisung dieselbe Aussage P für e** gilt.

Beispiele im Algorithmus:

{ x>0 ∧ y>0 }
a := x;
{ a>0 ∧ y>0 }
b := y;
{ a>0 ∧ b>0 }

{ G ist ggT von a-b und b ∧ a-b>0 ∧ b>0 }
a := a - b
{ G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 457

Ziele:

Zuweisungsregel verstehen

in der Vorlesung:

- Substitution erläutern
- Vorbedingung aus der Nachbedingung rückwärts konstruieren: Was will ich zeigen?
- Beispiele von Folie Mod-313a erläutern

Beispiele für Zuweisungsregel

	$\{ P_{[x/e]} \}$	x := e	$\{ P \}$	
1.	$\{ a > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \}$	
2.	$\{ a > 0 \wedge a > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge a > 0 \}$	x durch a ersetzen - nicht umgekehrt
3.	$\{ a > 0 \wedge x = 7 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge x = 7 \}$	**falscher Schluss**! **alle** x durch a ersetzen!
4.	$\{ a > 0 \wedge z > 0 \}$	x := a	$\{ x > 0 \wedge z > 0 \}$	z > 0 ist nicht betroffen
5.	$\{ i + 1 > 0 \}$	i := i + 1	$\{ i > 0 \}$	
6.	$\{ i \geq 0 \} \leftrightarrow \{ i + 1 > 0 \}$	i := i + 1	$\{ i > 0 \}$	passend umformen
7.	$\{ i = 2 \} \leftrightarrow \{ i + 1 = 3 \}$	i := i + 1	$\{ i = 3 \}$	passend umformen
8.	$\{ \text{wahr} \} \leftrightarrow \{ 1 = 1 \}$	x := 1	$\{ x = 1 \}$	passend umformen
9.	$\{ z = 5 \} \leftrightarrow$ $\{ z = 5 \wedge 1 = 1 \}$	x := 1	$\{ z = 5 \wedge x = 1 \}$	passend umformen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 458

Ziele:

Gebrauch der Zuweisungsregel üben

in der Vorlesung:

- Erläuterung und Begründung der Beispiele;
- Aus der gewünschten Nachbedingung die Vorbedingung herstellen.
- Dann zeigen, dass die Vorbedingung wirklich gilt.

Schlussregeln für Sequenz

Sequenzregel:

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ S_2\ \{R\}}{\{P\}\ S_1; S_2\ \{R\}}$$

Bedeutung:

Wenn $\{P\}\ S_1\ \{Q\}$ und $\{Q\}\ S_2\ \{R\}$ korrekte Schlüsse sind, dann ist auch $\{P\}\ S_1; S_2\ \{R\}$ ein korrekter Schluss

Beispiel:

$$\frac{\{ x>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{a := x;}\ \{ a>0 \wedge y>0 \} \qquad \{ a>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{b := y;}\ \{ a>0 \wedge b>0 \}}{\{ x>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{a := x; b := y;}\ \{ a>0 \wedge b>0 \}}$$

im Algorithmus die Schritte

{ x>0 ∧ y>0 }
a := x;
{ a>0 ∧ y>0 }

und

{ a>0 ∧ y>0 }
b := y;
{ a>0 ∧ b>0 }

zusammensetzen:

{ x>0 ∧ y>0 }
a := x;
{ a>0 ∧ y>0 }
b := y;
{ a>0 ∧ b>0 }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 459

Ziele:

Sequenzregel anwenden können

in der Vorlesung:

- Prinzip an der Sequenzregel erläutern
- Beispiel erläutern

Konsequenzregeln

Abschwächung der Nachbedingung

$$\frac{\{P\}\ S\ \{R\} \qquad \{R\} \rightarrow \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Verschärfung der Vorbedingung

$$\frac{\{P\} \rightarrow \{R\} \qquad \{R\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Beispiel:

$$\frac{\{a+b > 0\}\ x := a+b\ \{x > 0\} \qquad \{x > 0\} \rightarrow \{x \geq 0\}}{\{a+b > 0\}\ x := a+b\ \{x \geq 0\}}$$

im Algorithmus können Implikationen in Ausführungsrichtung eingefügt werden:

```
{ a+b > 0 }
x := a+b
{ x > 0 } → { 2*x ≥ 0}
y := 2*x
{ y ≥ 0}
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 460

Ziele:

Vor- und Nachbedingung anpassen

in der Vorlesung:

- Anwendung beim Zusammensetzen von Algorithmenschritten zeigen

Verständnisfragen:

Regel für 2-seitige Alternative

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ S_1\ \{ Q \} \qquad \{ P \wedge \neg B \}\ S_2\ \{ Q \}}{\{ P \}\ \text{falls } B\text{: } S_1 \text{ sonst } S_2\ \{ Q \}}$$

Aus der
gemeinsamen Vorbedingung P
führen beide Zweige auf
dieselbe Nachbedingung Q

Beispiel:

$\{ \text{true} \wedge a > 0 \}\ b := a\ \{ b > 0 \} \rightarrow \{ b \geq 0 \}$

$\{ \text{true} \wedge \neg (a > 0) \} \rightarrow \{ -a \geq 0 \}\ b := -a\ \{ b \geq 0 \}$

$\{ \text{true} \}$ falls $a > 0$: $b := a$ sonst $b := -a$ $\{ b \geq 0 \}$

im Algorithmus:

$\{ a>0 \wedge b>0 \wedge a \neq b \}$
falls a > b :
$\{ a>0 \wedge b>0 \wedge a>b \} \rightarrow$
$\{ a-b>0 \wedge b>0 \}$
a := a - b
{ a>0 ∧ b>0 }
sonst
$\{ a>0 \wedge b>0 \wedge b>a \} \rightarrow$
$\{ a>0 \wedge b-a>0 \}$
b := b - a
{ a>0 ∧ b>0 }
{ a>0 ∧ b>0 }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 461

Ziele:

Regel verstehen

in der Vorlesung:

- Beide Zweige müssen auf dieselbe Aussage führen
- Beispiele zeigen
- Konsequenzregeln mitverwenden

Regel für bedingte Anweisung

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ S\ \{ Q \} \qquad P \wedge \neg B \rightarrow Q}{\{ P \}\ \textbf{falls}\ B\ \textbf{:}\ S\ \{ Q \}}$$

Aus der
gemeinsamen Vorbedingung P führen
die Anweisung und die Implikation auf
dieselbe Nachbedingung Q

Beispiel:

$$\{ P \wedge a < 0 \} \rightarrow \{ -a \geq 0 \}\ a := -a\ \{ a \geq 0 \}$$

$$\frac{P \wedge \neg (a < 0) \rightarrow a \geq 0}{\{ P \}\ \text{falls } a < 0 \text{: } a := -a\ \{ a \geq 0 \}}$$

im Algorithmus:

{ P }
falls a < 0 :
    { P ∧ a < 0 } → { -a ≥ 0 }
    a := - a;
    { a ≥ 0 }
leere Alternative:
    { P ∧¬ (a < 0)} → { a ≥ 0 }
{ a ≥ 0 }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 462

Ziele:

Regel verstehen

in der Vorlesung:

- Die leere Alternative muss auf dieselbe Aussage führen wie die Anweisung.
- leere Alternative im Algorithmus sichtbar machen.
- Beispiele zeigen.

Aufrufregel

Der **Unteralgorithmus** UA habe **keine Parameter** und liefere **kein Ergebnis**.
Seine **Wirkung auf globale Variable** sei spezifiziert durch
die **Vorbedingung P und die Nachbedingung Q**.

Dann gilt für einen **Aufruf** von UA die Schlussregel

{ P } UA() { Q }

(Ohne Parameter und Ergebnis ist diese Regel nur von sehr begrenztem Nutzen.)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 463

Ziele:
Einfache Aufrufregel

in der Vorlesung:
Erläuterungen und Beispiel dazu

Schleifenregel

Wiederholung, Schleife:

$$\frac{\{\ INV \wedge B\ \}\ \ S\ \ \{\ INV\ \}}{\textbf{\{ INV \} solange B wiederhole S \{ INV } \wedge \neg \textbf{ B \}}}$$

Eine Aussage P heißt **Schleifeninvariante**, wenn man zeigen kann, dass sie an folgenden Stellen gilt: **vor der Schleife**,
vor und nach jeder Ausführung von S und
nach der Schleife.

Beispiel: Algorithmus zum Potenzieren

a := x; b := y; z := 1;
{ **INV** }

INV: $z \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0$

solange $b > 0$ wiederhole

$\{\ INV \wedge b > 0\ \} \leftrightarrow \{\ z \cdot a \cdot a^{b-1} = x^y \wedge (b-1) \geq 0\ \}$

b := b - 1;

$\{\ z \cdot a \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0\ \}$

z := z · a

{ **INV** }

$\{\ INV \wedge b \leq 0\ \} \leftrightarrow \{\ z \cdot a^b = x^y \wedge b = 0\ \} \rightarrow \{\ z = x^y\ \}$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 464

Ziele:

Schleifeninvariante verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Das Prinzip Invariante erläutern.
- Schlussregel erläutern.
- Am Beispiel mehrere Invariante zeigen.

Terminierung von Schleifen

Die **Terminierung einer Schleife** solange B wiederhole S
muss separat nachgewiesen werden:

1. Gib einen **ganzzahligen Ausdruck E** an über Variablen, die in der Schleife vorkommen, und zeige, dass E bei jeder Iteration durch S **verkleinert** wird.
2. Zeige, dass **E nach unten begrenzt** ist, z. B. dass $0 \leq E$ eine Invariante der Schleife ist.

Es kann auch eine andere Grenze als 0 gewählt werden.

E kann auch monoton **vergrößert werden und nach oben begrenzt** sein.

Nichtterminierung wird bewiesen, indem man zeigt,
dass $R \wedge B$ eine Invariante der Schleife ist und
dass es eine Eingabe gibt, so dass $R \wedge B$ vor der Schleife gilt.
R kann einen speziellen Zustand charakterisieren, in dem die Schleife nicht anhält.

Es gibt Schleifen, für die man **nicht entscheiden** kann,
ob sie für jede Vorbedingung **terminieren**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 465

Ziele:

Terminierungsnachweis verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu den Schritten.
- Der Ausdruck E braucht selbst nicht in der Schleife vorzukommen.
- Beispiele dazu.

Beispiele zur Terminierung (1)

1.

```
                { a > 0 ∧ b > 0}
Schleife1       solange a ≠ b wiederhole
Schleife2           solange a > b wiederhole
                        a := a - b;
Schleife3           solange a < b wiederhole
                        b := b - a
```

terminiert weil:

a. INV = a > 0 ∧ b > 0 ist Invariante für jede der 3 Schleifen, denn

```
                {INV}
Schleife1       solange a ≠ b wiederhole {INV ∧ a ≠ b}
Schleife2           solange a > b wiederhole {INV ∧ a > b}→
                        {a-b > 0 ∧ b > 0} a := a - b; {INV}
                    {INV}
Schleife3           solange a < b wiederhole {INV ∧ a < b}→
                        {a > 0 ∧ b-a > 0} b := b - a {INV}
                    {INV}
                {INV}
```

b. *Schleife2:* a fällt monoton, weil b > 0; a ist begrenzt, weil a > 0.
Schleife3: b fällt monoton, weil a > 0; b ist begrenzt, weil b > 0.
Schleife1: a+b fällt monoton, weil wg. a ≠ b Schl. 2 o. 3 mind. 1x iteriert wird; a+b begrenzt, wg. INV.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 466

Ziele:

Terminierungsnachweis üben

in der Vorlesung:

- 1 und 2 durch geeignete Invariante begründen
- 3 wird nicht versucht, zu entscheiden

Beispiele zur Terminierung (2)

2.

```
                { a > 0 ∧ b > 0}
Schleife1       solange a ≠ b wiederhole
Schleife2             solange a ≥ b wiederhole
                            a := a - b;
Schleife3             solange a < b wiederhole
                            b := b - a
```

terminiert nicht immer:

a > 0 ist nicht invariant in den Schleifen.

Die Nachbedingung von Schleife 2 ist $a < b \wedge a \geq 0$.

Schleife 3 kann erreicht werden im Zustand R: a = 0, z.B. wenn initial a = 2*b gilt.

$a = 0 \wedge a < b$ ist invariant in Schleife 3 und a < b ist die Schleifenbedingung.

$$\{a = 0 \wedge a < b\} \rightarrow \{a = 0 \wedge a < b-a\}\ b := b - a\ \{a = 0 \wedge a < b\}$$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 466a

Ziele:

Terminierungsnachweis üben

in der Vorlesung:

- 1 und 2 durch geeignete Invariante begründen
- 3 wird nicht versucht, zu entscheiden

Beispiele zur Terminierung (3)

3.

```
{ n ∈ ℕ ∧ n > 1 }
solange n > 1 wiederhole
      falls n gerade:
            n := n / 2
      sonst   n := 3 * n + 1
```

Terminierung / Nichtterminierung ist unbewiesen;
einige Ausführungen mit Anfangswerten n:

n	
2	1
3	10 5 16 8 4 2 1
4	2 1
5	16 8 4 2 1
6	3 10 5 16 8 4 2 1
7	22 11 34 17 52 26 13 50 25 76 38 19 ...

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 466b

Ziele:

Terminierungsnachweis üben

in der Vorlesung:

- 1 und 2 durch geeignete Invariante begründen
- 3 wird nicht versucht, zu entscheiden

Denksportaufgabe zu Invarianten

In einem Topf seien s schwarze und w weiße Kugeln, s + w > 0

solange mindestens 2 Kugeln im Topf sind

nimm 2 beliebige Kugeln heraus

falls sie gleiche Farbe haben:

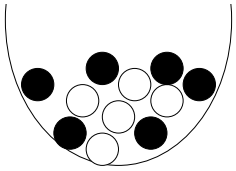
wirf beide weg und

lege eine neue schwarze Kugel in den Topf

falls sie verschiedene Farben haben:

lege die weiße Kugel zurück in den Topf und

wirf die schwarze Kugel weg



Welche Farbe hat die letzte Kugel?

Finden Sie Invarianten, die die Frage beantworten.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 467

Ziele:

Passende Invarianten finden

in der Vorlesung:

- Lösung erfragen.

Schrittweise Konstruktion und Verifikation

Vorbedingung: $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$
Nachbedingung: $q = x^n$

Konstruktionsidee:

Invariante INV: $x^n = q * a^i \wedge i \geq 0$
Zielbedingung: $i \leq 0$

falls i gerade: $x^n = q * (a^2)^{i/2}$
falls i ungerade: $x^n = q * a * (a^2)^{i/2}$

Algorithmus:

$\{ n \geq 0 \} \rightarrow \{ n = n \wedge n \geq 0 \wedge x = x \wedge 1 = 1 \}$
`a := x; q := 1; i := n;`
$\{ i = n \wedge i \geq 0 \wedge a = x \wedge q = 1 \} \rightarrow \{ INV \}$
`solange i > 0 wiederhole`
  $\{ INV \wedge i > 0 \}$
  `falls i ungerade:` $\{ INV \wedge i > 0 \wedge i \text{ ungerade} \} \rightarrow$
    $\{ x^n = q * a * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$ `q := q * a;` $\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
    leere Alternative für i gerade:
    $\{ INV \wedge i > 0 \wedge i \text{ gerade} \} \rightarrow \{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
  $\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$
  `a := a * a;`
  $\{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i > 0 \} \rightarrow \{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i/2 \geq 0 \}$
  `i := i / 2`
  $\{ x^n = q * a^i \wedge i \geq 0 \} \leftrightarrow \{ INV \}$
$\{ INV \wedge i \leq 0 \} \rightarrow \{ q = x^n \}$

Terminierung der Schleife: i fällt monoton und $i \geq 0$ ist invariant.

Schritte:
1. Vor-, Nachbedingung
2. Schleifeninvariante
3. Schleife mit INV
4. Initialisierung
5. Idee für Schleifenrumpf
6. Alternative
7. Schleife komplett
8. Terminierung

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 468

Ziele:

Entwicklung eines vollständigen Beispiels

in der Vorlesung:

Erläuterung der einzelnen Schritte.

In der Datei verifikation.pdf findet man die schrittweise Entwicklung des Inhaltes der Folie.

4. Modellierung mit Graphen

Modellierung beschreibt **Objekte und Beziehungen** zwischen ihnen.

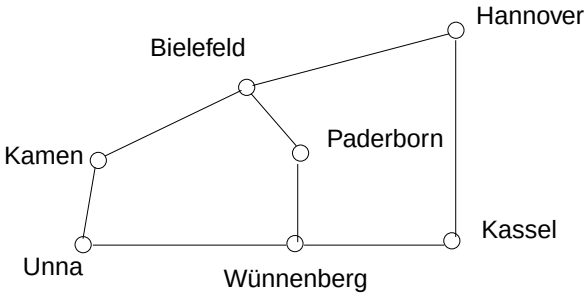
Graphen eignen sich zur Modellierung für ein **breites Aufgabenspektrum**.

Ein **Graph** ist eine Abstraktion aus Knoten und Kanten:

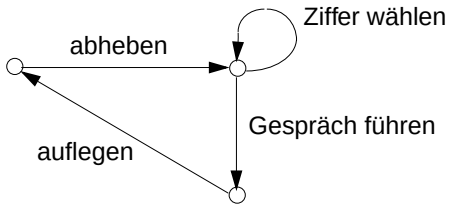
- **Knoten**: Eine Menge gleichartiger Objekte
- **Kanten**: Beziehung zwischen je zwei Objekten, 2-stellige Relation über Knoten

Je nach Aufgabenstellung werden **ungerichtete oder gerichtete** Graphen verwendet.

ungerichtet



gerichtet



Beschränkung auf **endliche Knotenmengen** und **2-stellige** Relation reicht hier aus.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 501

Ziele:

Intuitives Verständnis von Graphen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe und Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Beispiele für Graphen an.

Themenübersicht

4.1 Grundlegende Definitionen
gerichteter, ungerichteter Graph, Graphdarstellungen, Teilgraphen, Grad, Markierungen

4.2 Wegeprobleme
Weg, Kreis, Rundwege, Zusammenhang

4.3 Verbindungsprobleme
Spannbaum

4.4 Modellierung mit Bäumen
gewurzelte Bäume, Entscheidungsbäume, Strukturbäume, Kantorowitsch-Bäume

4.5 Zuordnungsprobleme
konfliktfreie Markierung, bipartite Graphen

4.6 Abhängigkeitsprobleme
Anordnungen, Abfolgen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 502

Ziele:

Vielfalt der Anwendungen von Graphen

in der Vorlesung:

- Eindruck der Aufgabenbereiche vermitteln,
- Beispiele skizzieren,
- gerichtete und ungerichtete Graphen zuordnen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5

5.1 Grundlegende Definitionen
Gerichteter Graph

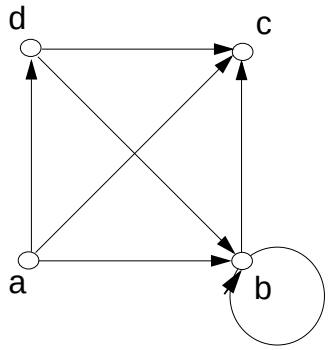
Ein **gerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E gerichteter Kanten**, mit $E \subseteq V \times V$.

Die Kantenmenge E ist eine **2-stellige Relation** über V.

Beispiel:

V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}



Eine Kante wird als (v, u) oder v -> u notiert.

Eine Kante (v, v) heißt **Schleife** oder Schlinge.

Die Definition von Graphen schränkt ein auf

- endliche Graphen mit **endlichen Knotenmengen**,
- einfache Kanten:
  - eine **Kante verbindet nicht mehr als zwei Knoten**,
  - von Knoten x nach Knoten y gibt es höchstens eine Kante

Multigraph: Es kann mehr als eine Kante von Knoten x nach Knoten y geben (siehe Mod-5.7)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 503

Ziele:

Gerichteten Graph als Relation verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe.

Synonyme:

- Knoten: auch Ecke, engl. vertex
- Kante: engl. edge
- gerichtete Kante: engl. arc

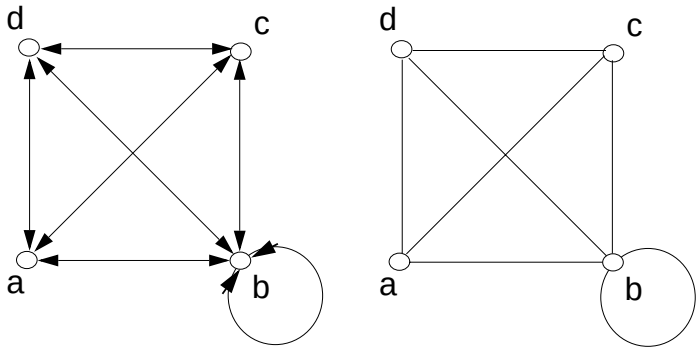
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Ungerichteter Graph

Ist die **Kantenmenge** E eines gerichteten Graphen eine **symmetrische Relation**, so beschreibt er einen **ungerichteten Graphen**:
Zu jeder Kante x -> y aus E gibt es auch y -> x in E.

Wir fassen zwei Kanten x -> y, y -> x zu einer **ungerichteten Kante** zusammen:
{x, y} die Menge der Knoten, die die Kante verbindet.



Ungerichtete Graphen werden auch direkt definiert:

Ein **ungerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E ungerichteter Kanten, mit E $\subseteq$ { {x, y} | x, y $\in$ V }**

Der abgebildete Graph mit ungerichteten Kanten:
V = {a, b, c, d} E = { {a, b}, {a, c}, {a, d}, { b }, {b, c}, {d, b}, {d, c} }

In dieser Notation ist eine **Schleife eine 1-elementige Menge**, z. B. { b }

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 504

Ziele:

Zusammenhang zwischen gerichtetem und ungerichtetem Graph

in der Vorlesung:

- Zusammenhang erläutern,
- Definition gegenüberstellen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Darstellung von Graphen

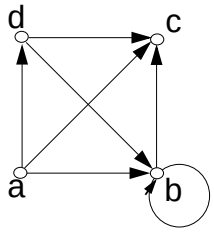
abstrakt:

Knotenmenge $V = \{a, b, c, d\}$

Kantenmenge $E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)\}$

anschaulich:

Graphik



Datenstrukturen für **algorithmische Berechnungen**:

Knotenmenge V als Indexmenge

lineare Ordnung der Knoten definieren

a, b, c, d

sei |V| = n

Adjazenzmatrix AM mit n * n Wahrheitswerten zur Darstellung der (gerichteten) Kanten:

$AM(i, j) = (i, j) \in E$

	a	b	c	d
a	f	w	w	w
b	f	w	w	f
c	f	f	f	f
d	f	w	w	f

Adjazenzlisten: zu jedem Knoten i eine Folge von Knoten, zu denen er eine Kante hat $(i, j) \in E$

a	(b, c, d)
b	(b, c)
c	()
d	(b, c)

Ungerichtete Graphen als gerichtete Graphen mit symmetrischer Kantenmenge darstellen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 505

Ziele:

Datenstrukturen für Graphen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den beiden Darstellungen

- Adjazenzmatrix: direkter Zugriff aber redundant
- Adjazenzlisten: kompakt aber Suche nach Kanten.

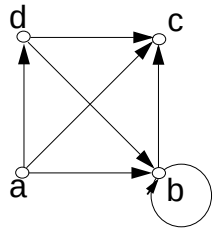
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Teilgraph

Der Graph G' = (V', E') ist ein **Teilgraph** des Graphen G = (V, E), wenn **V' ⊆ V und E' ⊆ E**.
(Gilt für **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen.)

Graph G = (V, E):



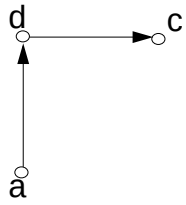
V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d),
(b, b), (b, c),
(d, b), (d, c)}

Teilgraph G' = (V', E') zu G

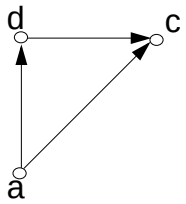
V' = {a, c, d}

E' = {(a, d), (d, c)}



Zu einem Graphen G = (V, E) **induziert** eine Teilmenge der Knoten V' ⊆ V den **Teilgraphen** G' = (V', E'), wobei E' alle Kanten aus E enthält, deren Enden in V' liegen.

Teilgraph G" zu G
durch V" = {a, c, d} **induziert**



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 506

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

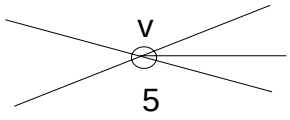
Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Knotengrad

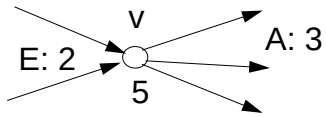
Sei G = (V, E) ein **ungerichteter** Graph:
Der **Grad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten {x, v}, die in v enden.



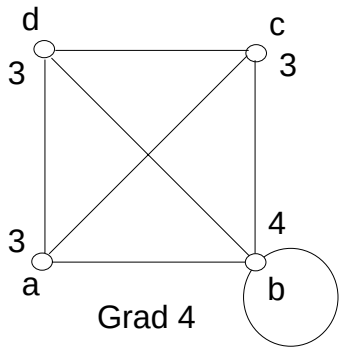
Sei G = (V, E) ein **gerichteter** Graph:
Der **Eingangsgrad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten (x, v) ∈ E, die in v münden.

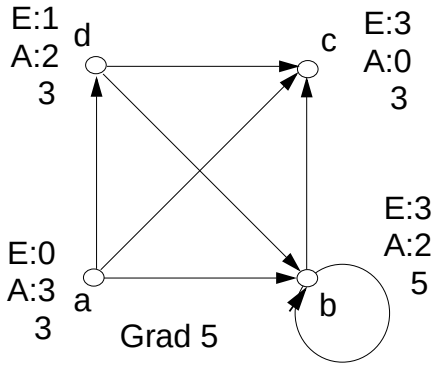
Der **Ausgangsgrad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten (v, x) ∈ E, die von v ausgehen.

Der **Grad** eines Knotens v ist die Summe seines Eingangs- und Ausgangsgrades.



Der **Grad eines** gerichteten oder ungerichteten **Graphen** ist der **maximale Grad seiner Knoten**.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 506a

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Markierte Graphen

Ein Graph G = (V, E) modelliert eine Menge von **Objekten** V und die Existenz von **Beziehungen** zwischen ihnen.

Viele Aufgaben erfordern, dass den **Knoten und/oder den Kanten weitere Informationen** zugeordnet werden.

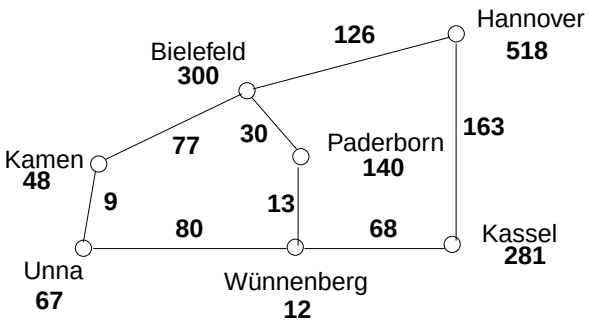
Dies leisten **Markierungsfunktionen**

Knotenmarkierung

MV : **V** $\rightarrow$ WV,
z.B. EinwohnerzahlTsnd: **V** $\rightarrow \mathbb{N}$

Kantenmarkierung

ME :**E** $\rightarrow$ WE,
z.B. EntfernungKm: **E** $\rightarrow \mathbb{N}$



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 507

Ziele:

Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe und Beispiele erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Verständnisfragen:

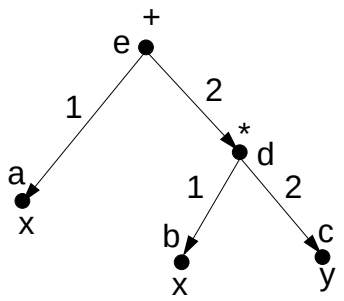
Geben Sie weitere Beispiel für Markierungen

Spezielle Kantenmarkierungen

Ordnung von Kanten:

$E \rightarrow \mathbb{N}$

legt die **Reihenfolge der Kanten** fest, die von einem Knoten ausgehen, z. B. im Kantorowitsch-Baum von links nach rechts.

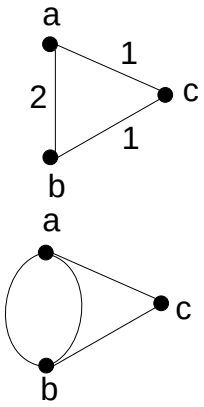


V := {a, b, c, d, e}
MV := {(a, x), (b, x), (c, y), (d,*), (e, +)}
ME := {((e,a), 1), ((e,d), 2), ((d,b), 1), ((d,c),2)}

Anzahl von Kanten:

$E \rightarrow \mathbb{N}$

modelliert **mehrfache Verbindungen zwischen denselben Knoten**.
G ist dann ein **Mehrfachgraph (Multigraph)**.
In der graphischen Darstellung schreibt man die Anzahl an die Kante oder zeichnet mehrere Kanten.



ME := {({a, b}, 2), ({a, c}, 1), ({b, c}, 1)}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 507a

Ziele:

Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe und Beispiele erläutern

nachlesen:

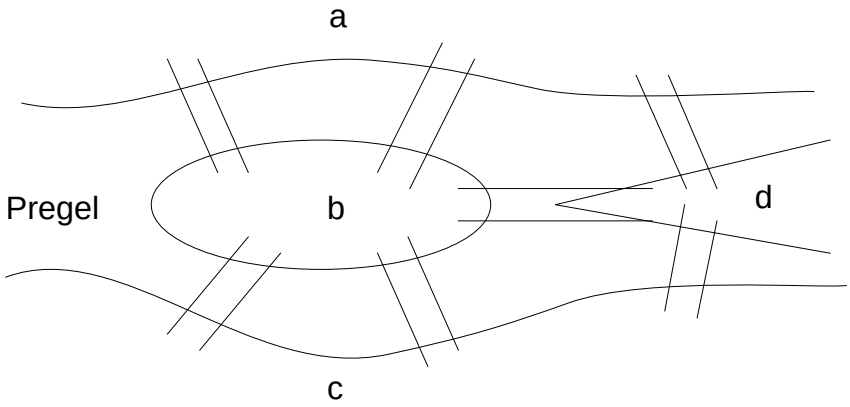
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.1

Verständnisfragen:

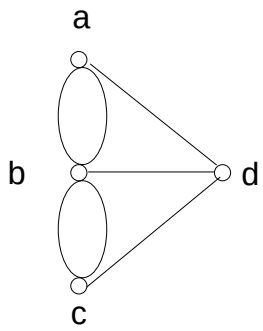
Geben Sie weitere Beispiel für Markierungen

5.2 Wegeprobleme

Beispiel: **Königsberger Brückenproblem** (Euler, 1736)



Skizze von Königsberg



Multigraph dazu

a. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

b. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert?

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 508

Ziele:

Berühmtes Modellierungsbeispiel

in der Vorlesung:

- Modellierung zeigen
- Lösung erarbeiten

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Verständnisfragen:

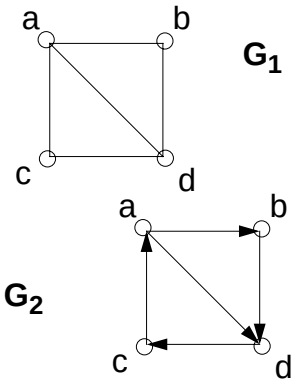
Hinweis:

- a: Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Grad der Knoten auf solch einem Rundweg.
- b: Für die Knoten, die nicht Endpunkte sind, gilt das Gleiche wie in (a).

Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph.
Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, ..., v_n)$
mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für i = 0,..., n-1
heißt ein **Weg von v_0 nach v_n**. Er hat die **Länge n** ≥ 0.

Entsprechend für gerichtete Graphen:
mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für i = 0,..., n-1



Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_n)$ einer Länge $n \geq 1$ mit $v_0 = v_n$
und **paarweise verschiedenen** Kanten $(v_0, v_1), ..., (v_{n-1}, v_n)$
heißt **Kreis im ungerichteten** Graphen und
Zyklus im gerichteten Graphen.

Ein gerichteter Graph der keinen Zyklus enthält heißt
azyklischer Graph (engl. **directed acyclic graph, DAG**).

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 509

Ziele:

Begriffe zu Wegen

in der Vorlesung:

Begriffe an Beispielen erläutern,

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Zusammenhang in Graphen

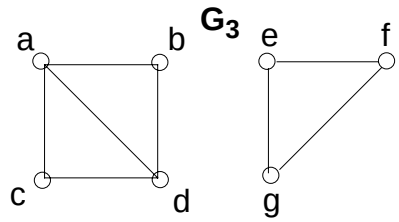
Ein ungerichteter Graph G = (V, E) heißt **zusammenhängend**, wenn es für beliebige Knoten v, w ∈ V einen Weg von v nach w gibt.

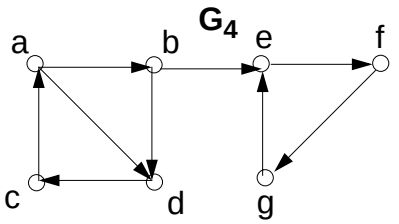
Ein gerichteter Graph heißt unter derselben Bedingung **stark zusammenhängend**.

Ein Teilgraph G' = (V', E') eines ungerichteten (gerichteten) Graphen G = (V, E) heißt **(starke) Zusammenhangskomponente**, wenn

- G' **(stark) zusammenhängend** ist und wenn
- G keinen anderen (stark) zusammenhängenden Teilgraphen G'' hat, der G' als Teilgraph enthält.

Zusammenhangskomponenten sind also **maximale Teilgraphen, die zusammenhängend** sind.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 510

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe an Beispielen erläutern:

- G3 ist nicht zusammenhängend.
- G3 hat 2 Zusammenhangskomponenten.
- Der durch {a,c,d} induzierte Teilgraph ist nicht Zusammenhangskomponente von G3.
- G4 ist nicht stark zusammenhängend.
- G4 hat 2 starke Zusammenhangskomponenten.

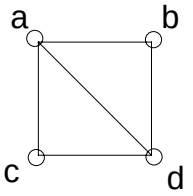
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

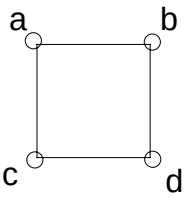
Spezielle Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender, schleifenfreier Graph.

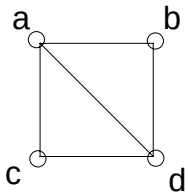
Ein **Euler-Weg** bzw. ein **Euler-Kreis** in G ist ein Weg, der **jede Kante aus E genau einmal** enthält.



(a, b, d, a, c, d)
Euler-Weg



(a, b, d, c, a)
Euler-Kreis



(a, b, d, c, a)
Hamilton-Kreis

G hat einen **Euler-Kreis** genau dann, wenn **alle Knoten geraden Grad** haben.

G hat einen **Euler-Weg**, der kein Kreis ist, genau dann,
wenn G genau **2 Knoten mit ungeradem Grad** hat.

Ein **Hamilton-Kreis** enthält **jeden Knoten aus V genau einmal**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 511

Ziele:

Wege mit speziellen Eigenschaften

in der Vorlesung:

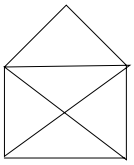
- Begriffe an Beispielen erläutern,
- Königsberger Brückenproblem lösen

nachlesen:

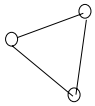
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Wegeprobleme mit Euler-Wegen

1. Königsberger Brückenproblem (Mod-5.8):
   Euler-Weg, Euler-Kreis

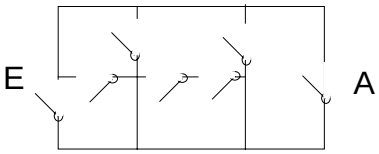


2. Kann man diese Figur in einem Zuge zeichnen?



3. Eine Inselgruppe mit n > 1 Inseln benötigt direkte Schiffsverbindungen zwischen allen Paaren von Inseln. Es gibt nur ein einziges Schiff. Kann es auf einer Tour alle Verbindungen genau einmal abfahren? Für welche n ist das möglich?

4. Planen Sie ein Gruselkabinett:
   Ein Haus mit n > 1 Räumen, 1 Eingangstür, eine Ausgangstür, beliebig vielen Innentüren. Jede Tür schließt nach Durchgehen endgültig. Die Besucher gehen einzeln durch das Haus. Es soll niemand eingesperrt werden.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 512

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

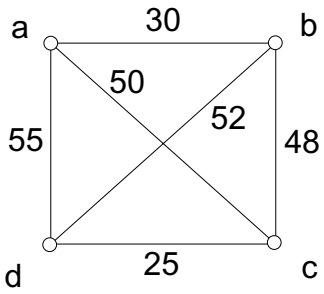
- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Graphen zu den Aufgaben zeigen;
- ihre Eigenschaften erkennen.
- In (4) ist wird jeder Raum und die Umgebung als ein Knoten modelliert.

nachlesen:

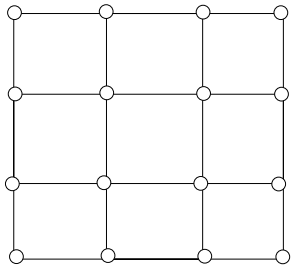
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

Wegeprobleme mit Hamilton-Kreisen

1. Traveling Salesman's Problem (Handlungsreisender): n Städte sind mit Straßen bestimmter Länge verbunden. Gesucht ist eine kürzeste Rundreise durch alle Städte.



2. In einem n * n Gitter von Prozessoren soll eine Botschaft sequentiell von Prozessor zu Prozessor weitergegeben werden. Sie soll jeden Prozessor erreichen und zum Initiator zurückkehren. Für welche n ist das möglich?



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 513

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Eigenschaften der Graphen erkennen.
- In (1) wird die Entfernung als Kantenmarkierung modelliert.

Allgemeine Hinweise zum Modellieren mit Graphen:

- Rolle der Kanten sorgfältig klären, gerichtet, ungerichtet, markiert.
- Häufig wird der Graph selbst nicht gebraucht, sondern nur bestimmte Eigenschaften, wie Knotengrad.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.2

5.3 Verbindungsprobleme

Modellierung durch Graphen wie bei Wegeproblemen (Abschnitt 5.2), aber hier interessiert
die **Existenz von Verbindungen** (Wegen) zwischen Knoten,
die **Erreichbarkeit** von Knoten,
nicht bestimmte Knotenfolgen.

Sei G = (V, E) ein
ungerichteter, zusammenhängender Graph
für alle folgenden Begriffe:

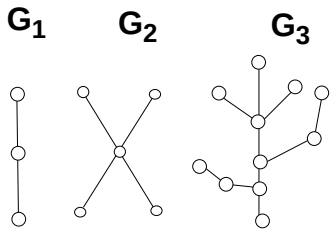
Wenn G **keine Kreise** enthält,
heißt er **(ungerichteter) Baum**.

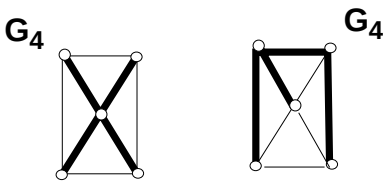
In Bäumen heißen **Knoten mit Grad 1 Blätter**.

Für jeden ungerichteten **Baum** G = (V, E) gilt
| E | = |V| - 1

Ein zusammenhängender Teilgraph von G,
der jeden Knoten aus V enthält und ein Baum ist,
heißt **Spannbaum** zu G.

Bäume





2 Spannbäume zu
demselben Graphen G_4

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 514

Ziele:

Begriff Spannbaum verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele zu den Begriffen.

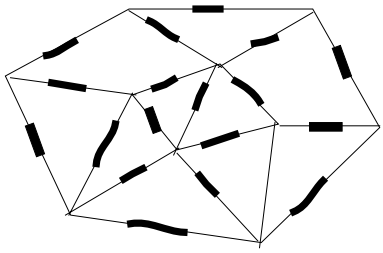
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3

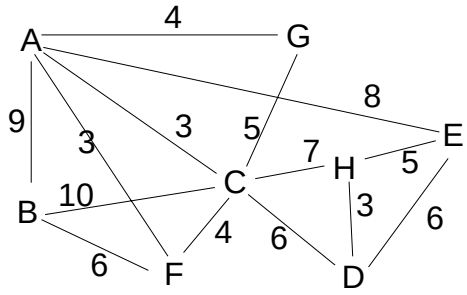
Modellierung mit Spannbäumen zu Graphen

Ein **Spannbaum** ist ein zusammenhängender Teilgraph mit der kleinsten Anzahl Kanten.
Er **modelliert kostengünstigen Zusammenhang**.

1. Aufständische Gefangene wollen eine minimale Anzahl von Gefängnistüren sprengen, so dass alle Gefangenen freikommen:



2. Alle Agenten A, ..., H sollen direkt oder indirekt miteinander kommunizieren. Die Risikofaktoren jeder paarweisen Verbindung sind:



Es soll ein Netz mit geringstem Risiko gefunden werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 515

Ziele:

Anwendung von Spannbäumen erkennen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Modellierungen.

- zu 1: Knoten modellieren Räume und Umgebung, Kanten modellieren die Türen.
- zu 2: Graph mit Kantenmarkierung aufstellen; Spannbaum mit minimaler Kantensumme suchen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3

Verbindung und Zusammenhang

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender Graph.

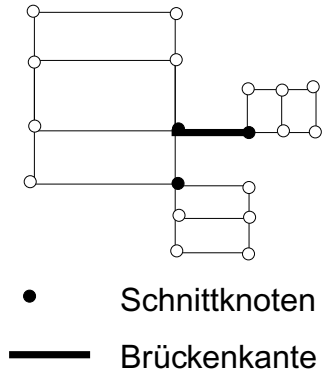
v ist ein **Schnittknoten** in G, wenn G **ohne v nicht mehr zusammenhängend** ist.

e ist eine **Brückenkante** in G, wenn G **ohne e nicht mehr zusammenhängend** ist.

G heißt **orientierbar**, wenn man für **jede Kante eine Richtung** so festlegen kann, dass der entstehende **gerichtete Graph stark zusammenhängend** ist.

G ist genau dann **orientierbar**, wenn G **keine Brückenkante** hat.

1. In der Innenstadt sollen zur Hauptverkehrszeit alle Straßen zu Einbahnstraßen werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?
2. In einer Stadt sollen einzelne Straßen zur Reparatur gesperrt werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 516

Ziele:

Zusammenhang zerstören

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Begriffe und Modellierungen.

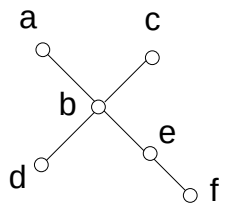
- zu 1, 2: Gerichtete Brückenkante zerstört den Zusammenhang.

nachlesen:

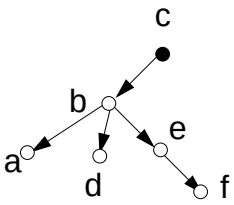
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.3

5.4 Modellierung mit Bäumen

In einem **ungerichteten Baum** gibt es
zwischen zwei beliebigen Knoten genau einen Weg.



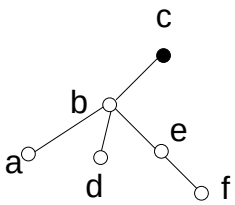
Ein gerichteter, **azyklischer** Graph G ist ein **gerichteter Baum**, wenn alle Knoten einen **Eingangsgrad** ≤ **1** haben und es genau einen Knoten mit **Eingangsgrad 0 gibt,**
er ist die Wurzel von G. G ist ein **gewurzelter Baum**.



Wurzel

Man kann aus einem **ungerichteten Baum** in eindeutiger Weise einen gerichteten machen, indem man **einen Knoten zur Wurzel bestimmt**.

Deshalb wird in gewurzelten Bäumen häufig die **Kantenrichtung nicht angegeben**.



In einem gewurzelten Baum ist die **Höhe eines Knotens v** die größte Länge eines Weges von v zu einem Blatt.
Die Höhe der Wurzel heißt **Höhe des Baumes**.

Knoten, die weder Wurzel noch Blatt sind heißen **innere Knoten**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 517

Ziele:

Zusammenhang: ungerichtet, gerichtet, gewurzelt

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Begriffe an dem Beispiel.
- Andere Wurzeln zum selben ungerichteten Graphen
- Höhen bestimmen.

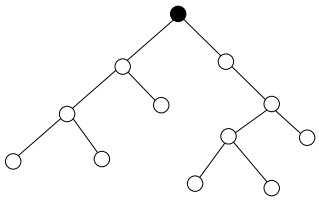
nachlesen:

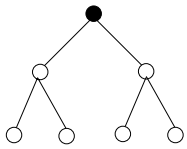
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Binärbäume

Ein gewurzelter Baum heißt **Binärbaum**, wenn
seine Knoten einen **Ausgangsgrad von höchstens 2** haben.

Ein **Binärbaum heißt vollständig**, wenn jeder Knoten außer den Blättern den **Ausgangsgrad 2** hat und die **Wege zu allen Blättern gleich lang** sind.





Höhe 2

Knoten: 7

Blätter: 4

Ein vollständiger **Binärbaum der Höhe h** hat **2^h Blätter** und **2^{h+1}-1 Knoten**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 518

Ziele:

Knotenzahlen in Binärbäumen verstehen

in der Vorlesung:

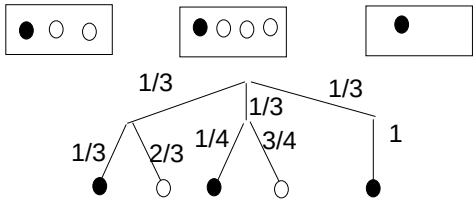
- Rekursive Struktur zeigen.
- Rekursive Berechnung der Knotenzahlen

nachlesen:

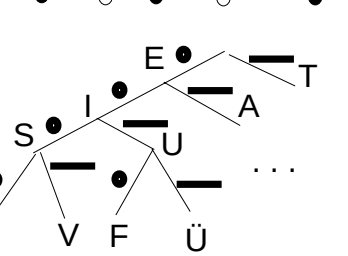
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Modellierung von Entscheidungsbäumen

Knoten modelliert **Zwischenstand** einer mehrstufigen Entscheidungsfolge
Kante modelliert eine der wählbaren **Alternativen**

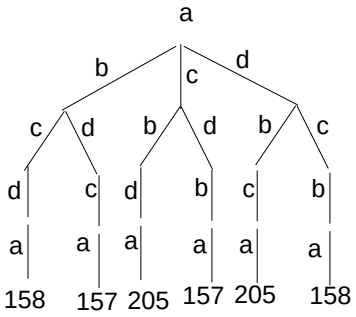


1. **Wahrscheinlichkeiten**,
   z. B. erst Schachtel, dann Kugel ziehen:



2. **Codierungen**,
   Z. B. Morse-Code

3. **Lösungsbaum** für kombinatorische Probleme,
   z. B. Traveling Salesman's Problem (Mod-5.13)
   Blätter repräsentieren einen Rundwege von a aus,
   Kanten sind mit Entscheidungen markiert



4. **Spielzüge**, z. B. Schach (ohne Bild)

Wird **derselbe Zwischenstand** durch verschiedene Entscheidungsfolgen erreicht,
kann man **Knoten identifizieren**.
Es entsteht ein azyklischer oder zyklischer Graph.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 519

Ziele:

Verschiedene Einsatzgebiete von Entscheidungsbäumen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Beispielen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Modellierung von Strukturen durch Bäume

Knoten modelliert ein **Objekt**.
Kante modelliert **Beziehung „besteht aus“**, „enthält“, „spezialisiert zu“, ...

Beispiele:

- **Typhierarchie**: Typ - Untertypen
- **Klassenhierarchie**: Oberklasse als Abstraktion ihrer Unterklassen (Mod-5.21)
  Vererbungshierarchie: Unterklassen erben von ihrer Oberklasse
- **Objektbaum**: Objekt enthält (Referenzen auf) Teilobjekte
- **Kantorowitsch-Baum**: Operator mit seinen Operanden (Mod-5.22)
- **Strukturbaum**: (Programm-)Struktur definiert durch eine kontextfreie Grammatik (Mod-5.23)

Identifikation gleicher Teilbäume führt zu azyklischen Graphen (DAGs).

Vorsicht:
Identifikation muss mit der **Bedeutung der Kanten verträglich** sein;
z. B. Ein Gegenstand kann nicht dasselbe Objekt mehrfach als Teil enthalten, wohl aber mehrere Objekte derselben Art.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 520

Ziele:

Varianten von Baumstrukturen

in der Vorlesung:

- Prinzip der Modellierung von Baumstrukturen
- Varianten auf den folgenden 3 Folien

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

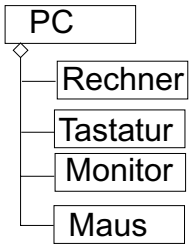
Verständnisfragen:

Kennen Sie weitere Varianten von Baumstrukturen?

Klassen- und Objekthierarchien

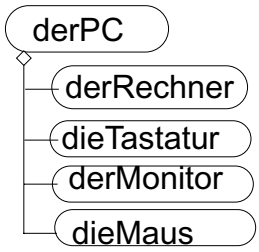
Kompositionsbeziehung im Klassendiagramm (UML, Folie 6.19ff):
Knoten: **Klassen**
Kanten: definieren, **aus welcher Art von Objekten** ein Objekt **besteht**
z. B. ein Objekt der Klasse PC **besteht aus**
einem Rechner-Objekt, einem Tastatur-Objekt, ...

Diese Beziehung zwischen den Klassen könnte
auch ein allgemeiner Graph sein



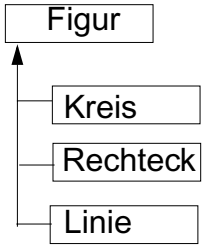
Objektbaum im Objektdiagramm (fast UML):
Knoten: **Objekte**
Kanten: definieren, **aus welchen Objekten** ein Objekt **besteht**
z. B. dieser PC besteht aus, diesem Rechner, ...

Diese Beziehung muss **konzeptionell ein Baum** sein.



Vererbungsbeziehung im Klassendiagramm (UML Notation):
Knoten: **Klassen**
Kanten: Unterklasse **erbt von** -> Oberklasse
Oberklasse **ist Abstraktion** <- ihrer Unterklassen
Kanten sind zur Wurzel hin gerichtet

Baum bei Einfachvererbung (Java)
azyklischer Graph bei Mehrfachvererbung (C++)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 521

Ziele:

UML Klassendiagramme, Vorgriff auf Abschnitt 6.4

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- UML Klassendiagramme: Wichtiges Beschreibungsmittel in der Software-Technik.
- Klassendiagramme sind aus ER-Modell abgeleitet (siehe Kapitel 5)
- Klassendiagramme: nicht nur Bäume
- Unterscheidung von Objektiagrammen und Klassendiagrammen

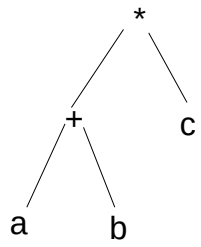
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Kantorowitsch-Bäume

Darstellung der Struktur von Termen, Formeln, Ausdrücken (siehe Mod-3.6)

(a + b) * c



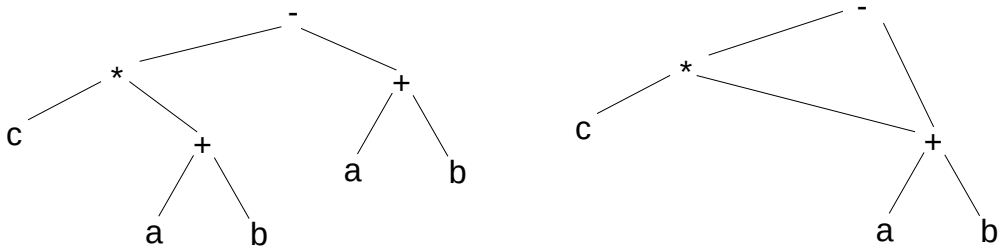
Knoten: Operator, Blattoperand

Kanten: Verbindung zu den Operanden eines Operators
Die Kanten sind geordnet (Kantenmarkierung):
erster, zweiter, ... Operand

Identifikation gleicher Teilbäume führt zu azyklischen Graphen (DAGs):

Z. B. identifizieren Übersetzer gleiche Teilbäume, um Code zu erzeugen, der sie nur einmal auswertet:

c * (a + b) - (a + b)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 522

Ziele:

Erinnerung an Kantorowitsch-Bäume

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Ordnung der Kanten
- Identifikation von Teilbäumen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

Strukturbäume zu kontextfreien Grammatiken

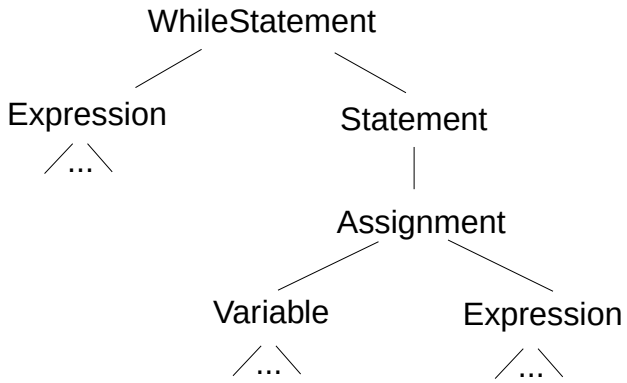
Kontextfreie Grammatiken definieren die Struktur von Programmen, Texten oder Daten.
Ein Programm, Text oder strukturierte Daten werden als Strukturbaum dargestellt.

Knoten: Programmkonstrukt (Nichtterminal der Grammatik)

Kante: Bezug zu Bestandteilen des Programmkonstruktes (Produktion der Grammatik)

Für die Repräsentation von Texten sind die **Kanten geordnet** (Kantenmarkierung)

Strukturbaum:



Produktionen aus der kontextfreien Grammatik:

Statement ::= Assigment

Statement ::= WhileStatement

...

WhileStatement ::= Expression Statement

Assignment ::= Variable Expression

```
while(i<10)   a[i]    =     2*i    ;
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 523

Ziele:

Strukturbaum am Beispiel kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- Kontextfreie Grammatiken werden in Kapitel 6 eingeführt
- Bedeutung von Produktionen informell: "WhileStatement besteht aus Expression und Statement".
- Bezug zum Strukturbaum.

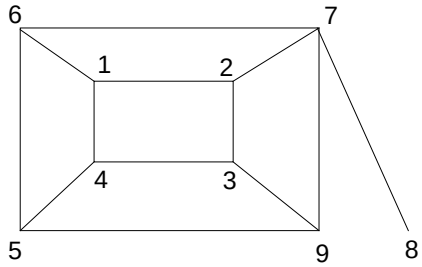
nachlesen:

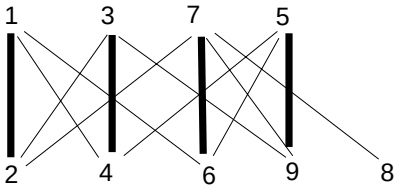
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.4

5.5 Zuordnungsprobleme

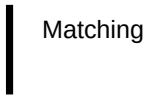
Aufgabenklasse **paarweise Zuordnung (Matching):**
Im ungerichteten Graphen G = (V, E) modelliert eine Kante {a, b} „a passt zu b“,
ggf. mit einer Kantenmarkierung als Abstufung

Gesucht ist eine **maximale Menge unabhängiger Kanten**,
das ist einTeilgraph M mit allen Knoten aus V und möglichst vielen Kanten aus E,
so dass der **Grad der Knoten höchstens 1** ist. M heißt ein **Matching** der Knoten von G.





bipartiter Graph



Graph G heißt **bipartit**, wenn V in **2 disjunkte Teilmengen $V = V_1 \cup V_2$** zerlegt werden kann, so dass jede Kante zwei Knoten aus verschiedenen Teilmengen verbindet.

Häufig liefert die Aufgabenstellung schon bipartite Graphen, sogenannte **Heiratsprobleme**:

Mann - Frau Aufgabe - Bearbeiter Verbraucher - Produkte

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 524

Ziele:

Paarweise Zuordnung verstehen

in der Vorlesung:

- Matching-Begriff erläutern,
- bipartit erläutern,
- Beispiele angeben

nachlesen:

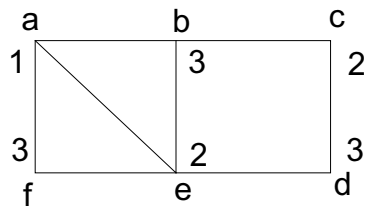
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.5

Konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung)

Aufgabenklasse **konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung):**
Im ungerichteten Graphen G = (V, E) modelliert eine Kante {a, b} „**a ist unverträglich mit b**“,

Gesucht ist eine Knotenmarkierung Färbung: V -> $\mathbb{N}$ („Farben“),
so dass durch eine **Kante verbundene Knoten verschiedene Marken haben**

Die **chromatische Zahl** eines Graphen G ist die minimale Zahl verschiedener „Farben“, die nötig ist, um G konfliktfrei zu markieren.



Es gilt: chromatische Zahl ≤ 1 + maximaler Knotengrad

Anwendungen:

Knoten:	**Kante:**	**Farbe / Marke:**
Staat auf Landkarte	gemeinsame Grenze	Farbe
Partygast	unverträglich	Tisch
Kurs	haben gemeinsame Teilnehmer	Termin
Prozess	benötigen gleiche Ressource	Ausführungszeitpunkt
Variable im Programm	gleichzeitig lebendig	Registerspeicher

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 525

Ziele:

Konzept der Färbung verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Unverträglichkeitsrelation.
- Chromatische Zahlen einer Graphen.
- Erläuterung der Anwendungen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.5

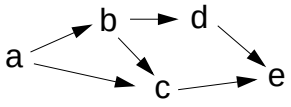
5.6 Abhängigkeitsprobleme

Graphen modellieren **Abhängigkeiten** zwischen Operationen und **Ausführungsreihenfolgen** von Operationen.

Abhängigkeitsgraph: gerichtet, azyklisch, voneinander abhängige Operationen.

Aufgaben dazu: sequentielle oder parallele **Anordnungen finden** (engl. **scheduling**).

Knoten: **Operation**, Ereignis; ggf. mit Dauer markiert
Kante: a -> b a ist **Vorbedingung** für b oder
b **benutzt** Ergebnis von a oder
a liest oder schreibt Ressource
bevor b sie überschreibt

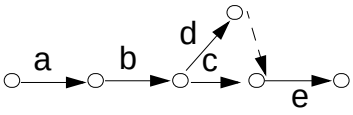


Anwendungen:

- **Projektplanung** mit abhängigen Teilaufgaben (PERT, CPM)
- abhängige **Transaktionen** mit einer Datenbank
- **Anordnung von Code** für die parallele Auswertung von Ausdrücken (Übersetzer)

Kritischer Pfad: längster Weg von einem Anfangsknoten zu einem Endknoten

Duale Modellierung:
Knoten: Ereignis, Anfang und Ende einer Operation
Kante: Operation, ggf. mit Dauer markiert



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 526

Ziele:

Prinzip der Abhängigkeitsgraphen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Bedeutung von Knoten und Kanten
- Markierungen
- kritischem Pfad
- dualer Modellierung

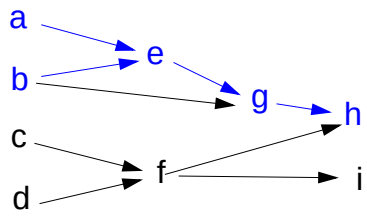
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

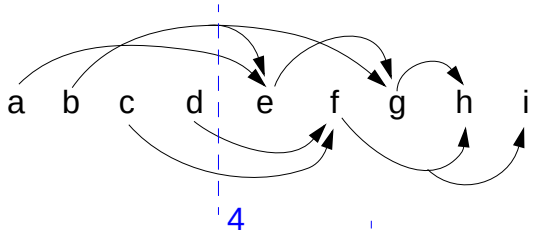
Anordnung von Abhängigkeitsgraphen

Anordnungsaufgaben:
gegebener Abhängigkeitsgraph

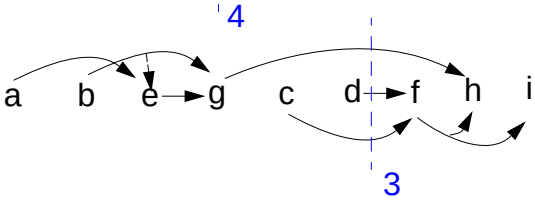
kritischer Pfad



sequentielle Anordnung der Knoten,
so dass **alle Kanten vorwärts** zeigen.

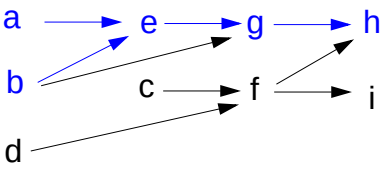


Meist sollen **Randbedingungen** erfüllt werden,
z. B. geringste Anzahl gleichzeitig benötigter Zwischenergebnisse im Speicher



parallele Anordnung mit
beschränkter Parallelität 3

Länge: 4 Schritte (Operationen)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 527

Ziele:

Anordnungsaufgaben verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Kanten nur vorwärts
- sequentielle Anordnung: Anzahl der Operationen bestimmt die Länge
- Anzahl der Zwischenergebnisse
- parallele Anordnung: kritischer Pfad bestimmt die Länge

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

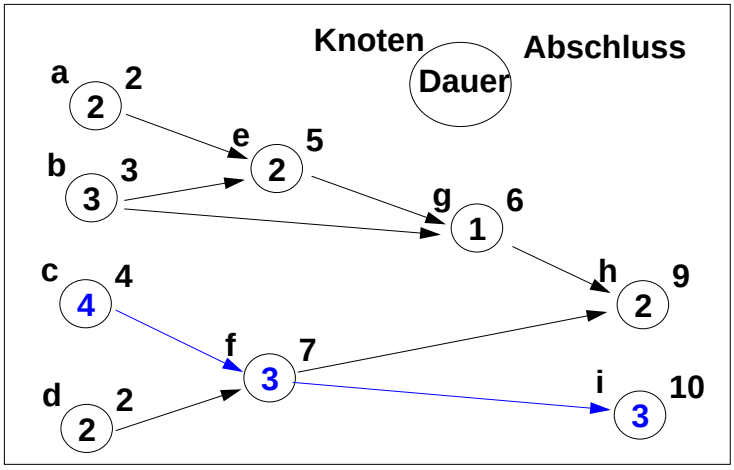
Operationen unterschiedlicher Dauer

Zwei **Knotenmarkierungen**:

Dauer der Operation und

frühester Abschlusstermin
= max. Abschluss der Vorgänger
+ Dauer des Knotens

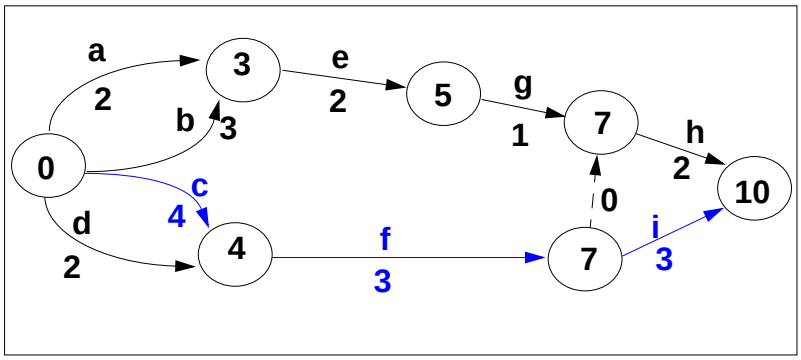
Kritischer Pfad gemäß maximaler Summe der Dauer der Operationen



Duale Modellierung:

Kante: Operation
mit **Dauer** als Marke
Mehrfachkanten, Multigraph

Knoten: Ereignis
„vorangehende Operationen sind abgeschlossen“
mit frühestem **Abschlusstermin** als Marke



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 528

Ziele:

Ausführungsdauer modellieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- den Knotenmarkierungen,
- der Berechnung des Abschlusstermins,
- dem Kritischen Pfad,
- der dualen Modellierung,
- der Notwendigkeit der zusätzlichen (gestrichelten) Kante

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Ablaufgraphen

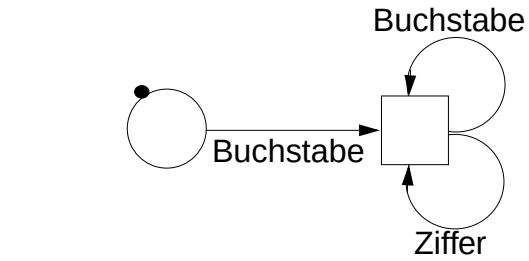
Gerichteter Graph (auch zyklisch) modelliert Abläufe.

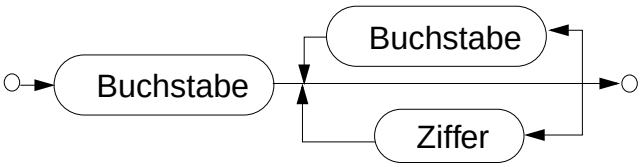
Knoten: Verzweigungsstelle, Zustand
Kanten: Fortsetzungsmöglichkeit

Jeder **Weg durch den Graphen** beschreibt einen **potenziellen Ablauf**
Die **Folge der Markierungen eines Weges** kann einen **Satz einer Sprache** modellieren.

Anwendungen:

- **Endlicher Automat** (siehe Kapitel 6)
  modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...
  Knoten: Zustand
  Kante: Übergang markiert mit Zeichen
- **Syntaxdiagramm**
  modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...
  Knoten: markiert mit Zeichen
  Kante a->b:„auf a kann b folgen“
  dual zum endlichen Automaten
- **Aufrufgraphen** (siehe Mod-5.30)
- **Ablaufgraphen** (siehe Mod-5.31)





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 529

Ziele:

Prinzip der Ablaufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen am Beispiel des endlichen Automaten.
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Kantenmarkierung.
- Syntaxdiagramme als dualen Beschreibung zum endlichen Automaten erklären,
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Knotenmarkierung.
- Viele einzelne Kanten sind in der Zeichnung zu einem "Gleissystem" zusammengefasst.

nachlesen:

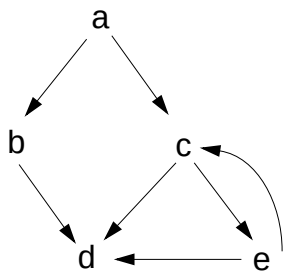
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Aufrufgraphen

Gerichteter Aufrufgraph: **Aufrufbeziehung zwischen Funktionen** in einem Programm; wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

Knoten: **Funktion** im Programm
Kante a -> b: Rumpf der Funktion a enthält einen Aufruf der Funktion b; **a könnte b aufrufen**

Zyklus im Aufrufgraph:
Funktionen, die sich **wechselweise rekursiv** aufrufen, z. B. (c, e, c)



Fragestellungen z. B.

- Welche Funktionen sind nicht rekursiv?
- Welche Funktionen sind nicht (mehr) erreichbar?
- Indirekte Wirkung von Aufrufen,
  z. B. nur e verändere eine globale Variable x;
  welche Aufrufe lassen x garantiert unverändert? b, d

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 530

Ziele:

Prinzip des Aufrufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

nachlesen:

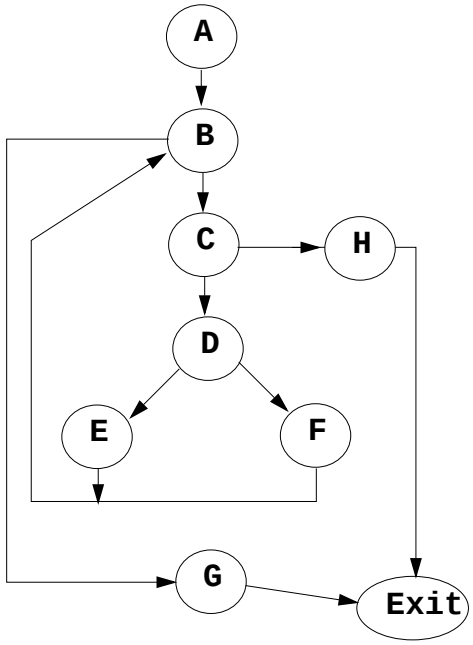
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Programmablaufgraphen

Gerichteter Graph, modelliert **Abläufe durch ein verzweigtes Programm** (bzw. Funktion); wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

Knoten: **unverzweigte Anweisungsfolge** (Grundblock), mit Verzweigung (Sprung) am Ende
Kante: **potenzieller Nachfolger im Ablauf**

```
ug = 0;                              A
og = obereGrenze;
while (ug <= og)                     B
{   mitte = (ug + og) / 2;           C
    if (a[mitte] == x)
           return mitte;             H
    else if (a[mitte] < x)           D
           ug = mitte + 1;           E
    else   og = mitte - 1;           F
}
return nichtGefunden;                G
```



Fragestellungen, z. B.

- Menge von Wegen, die den **Graph überdecken**, **Software-Testen**
- Wege mit bestimmten Eigenschaften, **Datenflussanalyse**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 531

Ziele:

Prinzip des Programmablaufgraphen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zum Prinzip,
- Auch andere Abläufe als Programme können so modelliert werden.
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

Zusammenfassung zu Graphen

Problemklassen:

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Entscheidungsbäume
- hierarchische Strukturen
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- Anordnungen in Folgen
- verzweigte Abläufe

Kanten- und Knotenbedeutung:

- verbunden, benachbart, ...
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- allgem. symmetrische Relation
- besteht aus, enthält, ist-ein
- (Halb-)Ordnungsrelation

Kanten-, Knotenmarkierungen:

- Entfernung, Kosten, Gewinn, ... bei Optimierungsproblemen
- „Färbung“, disjunkte Knotenmengen bei Zuordnungsproblemen
- Symbole einer Sprache

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 532

Ziele:

Übersicht zu Modellierungsaspekten

in der Vorlesung:

- Stichworte zum Einordnen von Modellierungsaufgaben,
- Hilfe zur Wahl einer passenden Variante von Graphen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 5.6

6 Modellierung von Strukturen
6.1 Kontextfreie Grammatiken

Kontextfreie Grammatik (KFG): formaler Kalkül, Ersetzungssystem; definiert

- **Sprache** als Menge von Sätzen; jeder **Satz** ist eine **Folge von Symbolen**
- **Menge von Bäumen**; jeder Baum repräsentiert die **Struktur eines Satzes** der Sprache

Anwendungen:

- Programme einer **Programmiersprache** und deren Struktur, z. B. Java, Pascal, C
- Sprachen als Schnittstellen zwischen Software-Werkzeugen, **Datenaustauschformate**, z. B. HTML, XML
- Bäume zur Repräsentation **strukturierter Daten**, z. B. in HTML
- Struktur von **Protokollen** beim Austausch von Nachrichten zwischen Geräten oder Prozessen

Beispiel zu HTML:

```
<table>
    <tr>
        <td>Mo</td>
        <td>11-13</td>
        <td>AM</td>
    </tr>
    <tr>
        <td>Fr</td>
        <td>9-11</td>
        <td>AM</td>
    </tr>
</table>
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 601

Ziele:

Einsatz von KFGn kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Anwendungen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Kontextfreie Grammatik

Eine kontextfreie Grammatik **G = (T, N, P, S)** besteht aus:

T	**Menge der Terminalsymbole** (kurz: Terminale)
N	**Menge der Nichtterminalsymbole** (kurz: Nichtterminale) T und N sind disjunkte Mengen
S $\in$ N	**Startsymbol** (auch Zielsymbol)
P $\subseteq$ N $\times$ V*	**Menge der Produktionen**; (A, x) $\in$ P, mit A $\in$ N und x $\in$ V*; statt (A, x) schreibt man A ::= x
V = T $\cup$ N	heißt auch **Vokabular**, seine Elemente heißen **Symbole**

Man sagt „In der Produktion A ::= x steht A auf der **linken Seite** und x auf der **rechten Seite**."
Man gibt Produktionen häufig **Namen**: p1: A ::= x
In Symbolfolgen aus V* werden die Elemente nur durch Zwischenraum getrennt: A ::= B C D

Beispiel:

Terminale **T** = { **(**, **)** }

Nichtterminale **N** = { **Klammern**, **Liste** }

Startsymbol **S** = **Klammern**

Produktionsmenge P =

Name	*N*	*V**
	{	
p1:	**Klammern**	**::= '(' Liste ')'**
p2:	**Liste**	**::= Klammern Liste**
p3:	**Liste**	**::=**
	}	

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 602

Ziele:

KFG Definition lernen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Bergriffe an dem Beispiel
- Erläuterung der Notation von Produktionen
- Unbenannte Terminale werden gekennzeichnet, um Verwechselungen mit KFG-Zeichen zu vermeiden: '('

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Bedeutung der Produktionen

Eine Produktion A ::= x ist eine **Strukturregel**: A **besteht aus** x

Beispiele:

	DeutscherSatz	::=	Subjekt Prädikat Objekt
Ein	DeutscherSatz	*besteht aus (der Folge)*	Subjekt Prädikat Objekt
	Klammern	::=	'(' Liste ')'
	Zuweisung	::=	Variable ':=' Ausdruck
	Variable	::=	Variable '[' Ausdruck ']'

Produktion graphisch als gewurzelter Baum
mit geordneten Kanten und mit Symbolen als Knotenmarken:

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 603

Ziele:

Produktionen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen der beiden Rollen von Produktionen:

- Definition von Struktur: "besteht aus"
- Definition von Ersetzungen
- Siehe auch Mod-6.5 zur graphischen Darstellung von Produktionen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Ableitungen

Produktionen sind **Ersetzungsregeln**: Ein Nichtterminal A in einer Symbolfolge u A v kann durch die rechte Seite x einer Produktion A ::= x ersetzt werden.
Das ist ein **Ableitungsschritt**; er wird notiert als u A v => u x v

z. B. **`Klammern Klammern Liste`** => **`Klammern ( Liste ) Liste`**
mit Produktion p1

Beliebig viele **Ableitungsschritte nacheinander** angewandt heißen **Ableitung**;
notiert als **u =>* v**

Eine kontextfreie Grammatik **definiert eine Sprache**; das ist eine Menge von Sätzen.
Jeder Satz ist eine Folge von Terminalsymbolen, die aus dem Startsymbol ableitbar ist:
L(G) = { w | w ∈ T* und S =>* w }

Grammatik auf Mod-6.2 **definiert** geschachtelte Folgen paariger Klammern als **Sprache**:
`{ (), (()), (()()()),((()())(())), ...}` ⊆ L(G)

Ableitung des Satzes `(()())`:

S
= Klammern
=> (Liste)
=> (Klammern Liste)
=> (Klammern Klammern Liste)
=> (Klammern (Liste) Liste)
=> ((Liste) (Liste) Liste)
=> (( ) (Liste) Liste)
=> (( ) ( ) Liste)
=> (( ) ( ))

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 604

Ziele:

Ableitungsbegriff verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Beispiele für Ableitungen
- Beispiele für Sprachen

nachlesen:

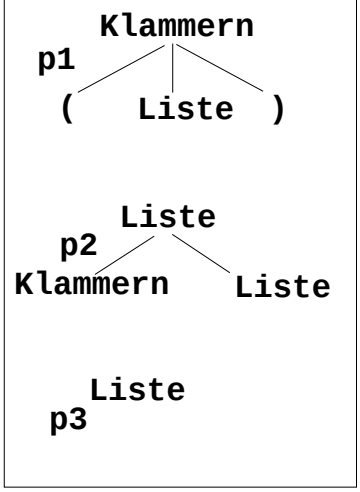
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Ableitungsbäume

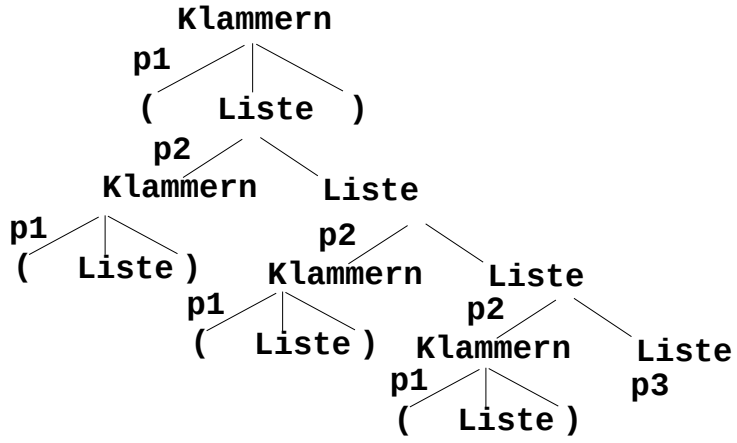
Jede Ableitung kann man als **gewurzelten Baum** darstellen:

Die **Knoten** mit ihren Marken repräsentieren **Vorkommen von Symbolen**.
Ein Knoten mit seinen direkten Nachbarn repräsentiert die **Anwendung einer Produktion**.
Die **Wurzel** ist mit dem **Startsymbol** markiert.
Terminale kommen nur an **Blättern** vor.

Produktionen:



ein Ableitungsbaum:



der Satz dazu: **(()())**

Satz zum Baum: Terminale im links-abwärts Durchgang

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 605

Ziele:

Ableitungsbaum verstehen

in der Vorlesung:

- Konstruktion des Baumes durch Zusammensetzen von Produktionsanwendungen am "Bastelbogen" zeigen,
- Zusammenhang zum Satz der Sprache

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Beispiel: Ausdrucksgrammatik

p1: Ausdruck ::= Ausdruck BinOpr Ausdruck

p2: Ausdruck ::= Zahl

p3: Ausdruck ::= Bezeichner

p4: Ausdruck ::= ’(’ Ausdruck ’)’

p5: BinOpr ::= ’+’

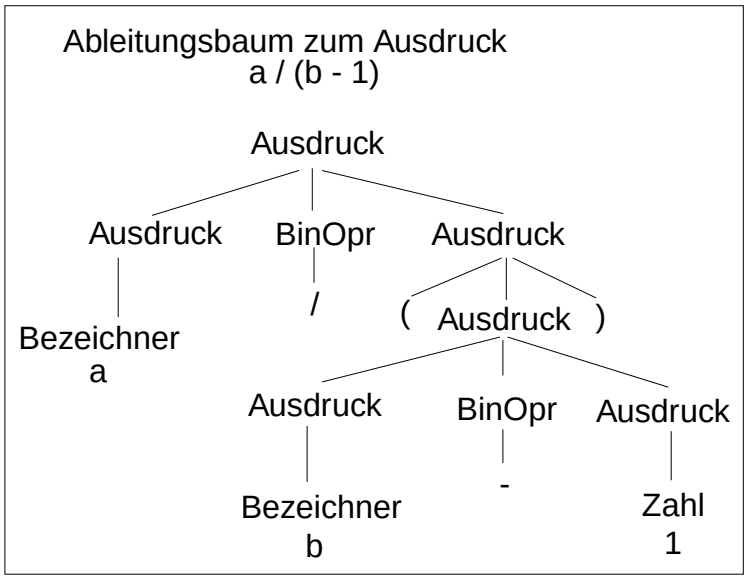
p6: BinOpr ::= ’-’

p7: BinOpr ::= ’*’

p8: BinOpr ::= ’/’

Startsymbol: Ausdruck

Terminale:
T = { Zahl, Bezeichner, (,), +, -, *, / }



Schreibweise der Terminale
Zahl und Bezeichner wird nicht in der KFG definiert.

Grammatik ist mehrdeutig: Es gibt **Sätze, die mehrere Ableitungsbäume** haben.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 606

Ziele:

Vollständiges Beispiel sehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu.
- Vergleich mit Kantorowitsch-Bäumen.
- Diese Grammatik ist mehrdeutig: z. B. hat der Satz a+b+c mehrere Ableitungsbäume.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.1

Beispiel: Tabellen in HTML

HTML: Hypertext Markup Language zur Darstellung von verzeigerten Dokumenten, insbesondere im WWW verwendet.
typisch: geklammerte Strukturen mit Klammern der Form **<x>...</x>**.
hier: vereinfachter Ausschnitt aus der Sprache zur Darstellung von Tabellen.

Produktionen der kontextfreien Grammatik:

Table	::= '<table>' Rows '</table>'
Rows	::= Row *
Row	::= '<tr>' Cells '</tr>'
Cells	::= Cell *
Cell	::= '<td>' Text '</td>'
Cell	::= '<td>' Table '</td>'

Erweiterung der Notation von KFGn:

X * auf der rechten Seite einer Produktion steht für eine **beliebig lange Folge von X**

(gleiche Bedeutung wie bei Wertebereichen)

Beispieltext in HTML:

```
<table>
    <tr> <td>Tag</td>
         <td>Zeit</td>
         <td>Raum</td></tr>
    <tr> <td>Mo</td>
         <td>11:00-12.30</td>
         <td>AM</td></tr>
    <tr> <td>Fr</td>
         <td>9:15-10:45</td>
         <td>AM</td></tr>
</table>
```

Darstellung der Tabelle:

Tag	Zeit	Raum
Mo	11:00-12.30	AM
Fr	9:15-10:45	AM

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607

Ziele:

HTML-Ausschnitt verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen

- zum *-Operator (siehe Mod-2.8b),
- zur Struktur von HTML,
- zum Beispiel,
- zur Baumdarstellung

Übungsaufgaben:

Beschreiben Sie die Operationsfolgen zur Bedienung des Getränkeautomaten durch eine KFG.

6.2 Baumstrukturen in XML
Übersicht

XML (Extensible Markup Language, dt.: Erweiterbare Auszeichnungssprache)

- seit 1996 vom W3C definiert, in Anlehnung an SGML
- Zweck: Beschreibungen **allgemeiner Strukturen** (nicht nur Web-Dokumente)
- **Meta-Sprache** (“erweiterbar”):
  Die Notation ist festgelegt (Tags und Attribute, wie in HTML),
  Für beliebige Zwecke kann **jeweils eine spezielle syntaktische Struktur** definiert werden (DTD)
  Außerdem gibt es Regeln (XML-Namensräume), um XML-Sprachen in andere **XML-Sprachen zu importieren**
- X**HTML** ist so als XML-Sprache definiert
- Viele **Sprachen sind aus XML abgeleitet,** z.B. SVG, MathML, SMIL, RDF, WML
- **individuelle XML-Sprachen** werden definiert, um strukturierte Daten zu speichern, die von **Software-Werkzeugen geschrieben und gelesen** werden
- XML-Darstellung von strukturierten Daten kann mit verschiedenen Techniken **in HTML transformiert** werden, um sie **formatiert anzuzeigen:**
  XML+CSS, XML+XSL, SAX-Parser, DOM-Parser

Dieser Abschnitt orientiert sich eng an **SELFHTML** (Stefan Münz), http://de.selfhtml.org

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607a

Ziele:

Rolle von XML verstehen

in der Vorlesung:

Die Aspekte werden einführend erklärt.

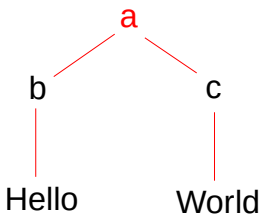
3 elementare Prinzipien

Die XML-Notation basiert auf 3 elementaren Prinzipien:

A: Vollständige Klammerung durch Tags

```
<a>
    <b>Hello</b>
    <c>World</c>
</a>
```

B: Klammerstruktur ist äquivalent zu gewurzeltem Baum



C: Kontextfreie Grammatik definiert Bäume; eine DTD ist eine KFG

```
a ::= b c
b ::= PCDATA
c ::= PCDATA
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607b

Ziele:

Prinzipien der XML-Notation

in der Vorlesung:

Kurze Erklärung der Prinzipien.

Notation und erste Beispiele

Ein Satz in einer XML-Sprache ist ein Text, der durch Tags strukturiert wird.

Tags werden **immer** in **Paaren von Anfangs- und End-Tag** verwendet:

```
<ort>Paderborn</ort>
```

Anfangs-Tags können Attribut-Wert-Paare enthalten:

```
<telefon typ="dienst">05251606686</telefon>
```

Die **Namen von Tags und Attributen** können für die XML-Sprache **frei gewählt** werden.

Mit Tags gekennzeichnete Texte können geschachtelt werden.

```
<adressBuch>
<adresse>
   <name>
      <nachname>Mustermann</nachname>
      <vorname>Max</vorname>
   </name>
   <anschrift>
      <strasse>Hauptstr 42</strasse>
      <ort>Paderborn</ort>
      <plz>33098</plz>
   </anschrift>
</adresse>
</adressBuch>
```

$(a+b)^2$ in MathML:

```
<msup>
   <mfenced>
      <mrow>
         <mi>a</mi>
         <mo>+</mo>
         <mi>b</mi>
      </mrow>
   </mfenced>
   <mn>2</mn>
</msup>
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607c

Ziele:

Notation von XML verstehen

in der Vorlesung:

An den Beispielen wird erklärt:

- Tags und Attribute werden für den speziellen Zweck frei erfunden,
- ein Tag-Paar begrenzt ein Element und benennt seine Rolle,
- geschachtelte Strukturen.
- Wir entwerfen eigene Sprachen!!

Ein vollständiges Beispiel

Kennzeichnung des Dokumentes als XML-Datei

Datei mit der Definition der Syntaktischen Struktur dieser XML-Sprache (DTD)

Datei mit Angaben zur Transformation in HTML

```
<?xml version="1.0" encoding="ISO-8859-1"?>
<!DOCTYPE adressBuch SYSTEM "adressBuch.dtd">
<?xml-stylesheet type="text/xsl" href="adressBuch.xsl" ?>
<adressBuch>
<adresse>
   <name>
      <nachname>Mustermann</nachname>
      <vorname>Max</vorname>
   </name>
   <anschrift>
      <strasse>Hauptstr 42</strasse>
      <ort>Paderborn</ort>
      <plz>33098</plz>
   </anschrift>
</adresse>
</adressBuch>
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607d

Ziele:

Technische Angaben sehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erklärt:

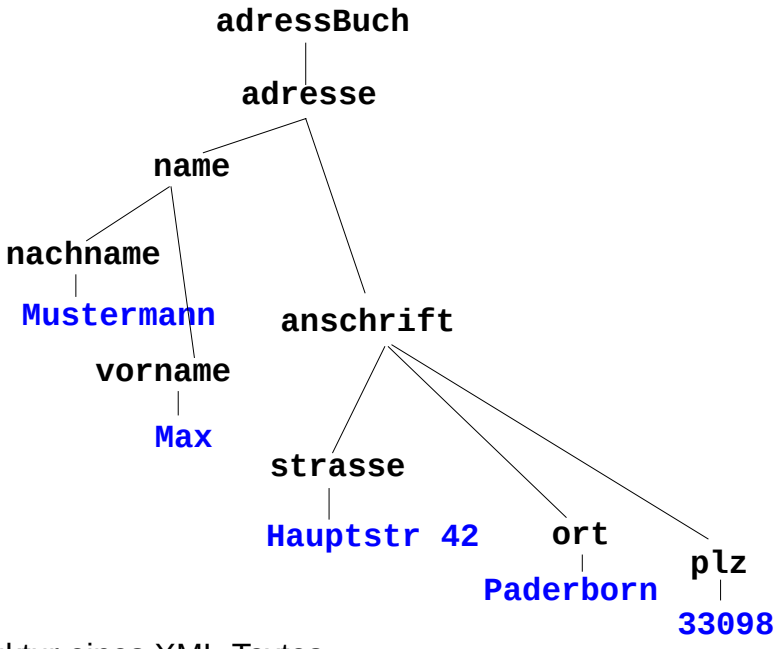
- die 3 technischen Angaben,
- XML-Text.

Baumdarstellung von XML-Texten

Jeder XML-Text ist durch Tag-Paare **vollständig geklammert** (wenn er *wohlgeformt* ist).

Deshalb kann er eindeutig **als Baum dargestellt** werden. (Attribute betrachten wir hier nicht)
Wir markieren die inneren Knoten mit den Tag-Namen; die Blätter sind die elementaren Texte:

```
<adressBuch>
<adresse>
   <name>
      <nachname>Mustermann
      </nachname>
      <vorname>Max
      </vorname>
   </name>
   <anschrift>
      <strasse>Hauptstr 42
      </strasse>
      <ort>Paderborn</ort>
      <plz>33098</plz>
   </anschrift>
</adresse>
</adressBuch>
```



XML-Werkzeuge können die Baumstruktur eines XML-Textes ohne weiteres ermitteln und ggf. anzeigen.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607e

Ziele:

XML-Text als Baum verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erklärt:

- vollständige Klammerung durch Tags,
- definiert einen Baum,
- aus dem Baum kann man den Text wiederherstellen

Wohlgeformte XML-Texte

XML-Texte sind **wohlgeformt** (well-formed), wenn sie folgende Regeln erfüllen:

1. Ein Element beginnt mit einem Anfangs-Tag und endet mit einem gleichnamigen End-Tag. Dazwischen steht eine evtl. leere Folge von Elementen und elementaren Texten.
2. Elementare Texte können beliebige Zeichen, aber keine Tags enthalten.
3. ein XML-Text ist ein Element.

wohlgeformt

```
<a>
   <b>
      <c>1</c>
      <d>2</d>
   </b>
   <e>3</e>
</a>
```

wohlgeformt

```
<a>
   1
   <b>
      2
      <c>3</c>
      4
      <d>5</d>
   </b>
   <e>6</e>
</a>
```

nicht wohlgeformt

```
<a>
   <b>
      <c>1</b>
   </c>
</a>
```


Ziele:

Regeln für wohlgeformte XML-Texte kennenlernen

in der Vorlesung:

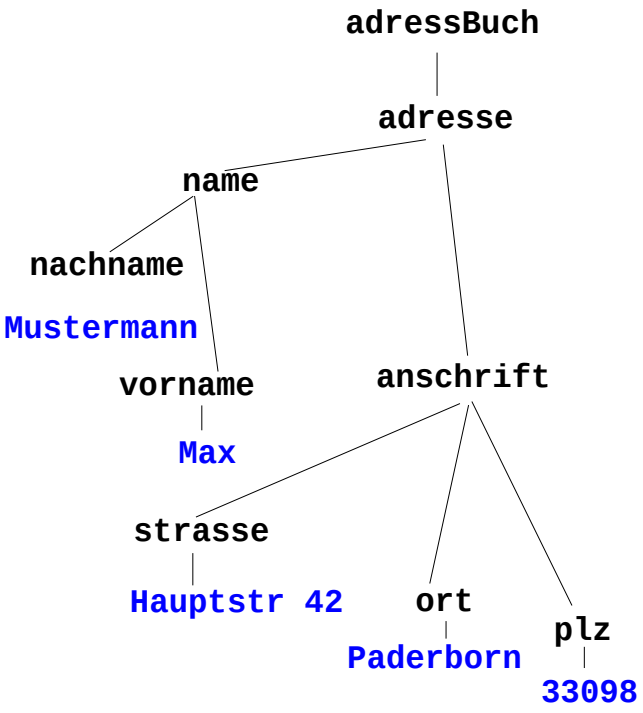
Regeln und Beispiele werden erklärt.

Grammatik definiert die Struktur der XML-Bäume

Mit **kontextfreien Grammatiken (KFG)** kann man **Bäume definieren**.

Folgende KFG definiert korrekt strukturierte Bäume für das Beispiel Adressbuch:

```
adressBuch ::= adresse*
adresse    ::= name anschrift
name       ::= nachname vorname
Anschrift  ::= strasse ort plz
nachname   ::= PCDATA
vorname    ::= PCDATA
strasse    ::= PCDATA
ort        ::= PCDATA
plz        ::= PCDATA
```



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607g

Ziele:

Definition durch KFG verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erklärt:

- Tag-Namen werden Nichtterminale,
- PCDATA ist das Terminal für die elementaren Texte,
- weiteren Baum skizzieren.

Document Type Definition (DTD) statt KFG

Die Struktur von XML-Bäumen und -Texten wird in der **DTD-Notation** definiert. Ihre Konzepte entsprechen denen von KFGn:

KFG

```
adressBuch ::= adresse*
adresse    ::= name anschrift
name       ::= nachname vorname
Anschrift  ::= strasse ort plz
nachname   ::= PCDATA
vorname    ::= PCDATA
strasse    ::= PCDATA
ort        ::= PCDATA
plz        ::= PCDATA
```

DTD

```
<!ELEMENT adressBuch(adresse)*          >
<!ELEMENT adresse   (name, anschrift)   >
<!ELEMENT name      (nachname, vorname)>
<!ELEMENT anschrift (strasse, ort, plz)>
<!ELEMENT nachname  (#PCDATA)           >
<!ELEMENT vorname   (#PCDATA)           >
<!ELEMENT strasse   (#PCDATA)           >
<!ELEMENT ort       (#PCDATA)           >
<!ELEMENT plz       (#PCDATA)           >
```

weitere Formen von DTD-Produktionen:

`(Y)+`	nicht-leere Folge
`(A | B)`	Alternative
`(A)?`	Option
`EMPTY`	leeres Element

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 607h

Ziele:

DTD-Notation als KFG verstehen

in der Vorlesung:

Am Beispiel wird erklärt:

- Zuordnung der KFG- zu DTD-Konstrukten,
- Erklärung der weiteren Formen an Beispielen.
- Hinweis: Die DTD-Notation zur Definition von Attributlisten in Anfangs-Tags wird hier nicht beschrieben.

6.3 Entity-Relationship-Modell

Entity-Relationship-Modell, **ER-Modell** (P. Chen 1976): Kalkül zur Modellierung von **Aufgabenbereichen mit ihren Objekten, Eigenschaften und Beziehungen**.

Weitergehende Zwecke:

- **Entwurf von Datenbanken**;
  Beschreibung der Daten, die die DB enthalten soll, „konzeptionelles Schema“
- **Entwurf von Software-Strukturen**
  Entwurfssprache UML basiert auf ER

Grundbegriffe

- **Entity** **Objekt** des Aufgabenbereiches
- **Relation** **Beziehung** zwischen Objekten
- **Attribut** Beschreibt ein **Eigenschaft** eines Objektes durch einen **Wert**

Graphische und textuelle **Notationen** für ER-Modellierungen; hier graphische

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 608

Ziele:

Zweck des ER-Modells verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

nachlesen:

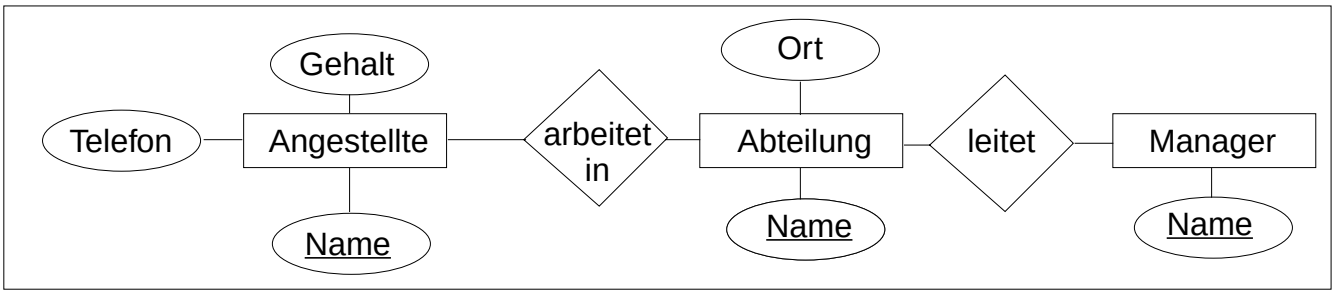
G. Engels: Skript zu "Grundlagen von Datenbanken"

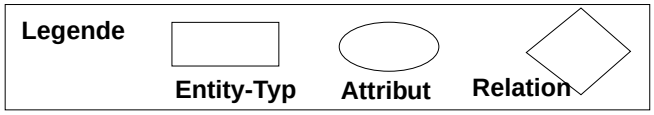
J. D. Ullman: Principles of Database and Knowledge-Base Systems, Vol. I, Computer Science Press, 1988; Ch. 2.2

A.L.Furtado, E. J. Neuhold: Formal Techniques for Data Base Design, Springer, 1986; Ch. 9

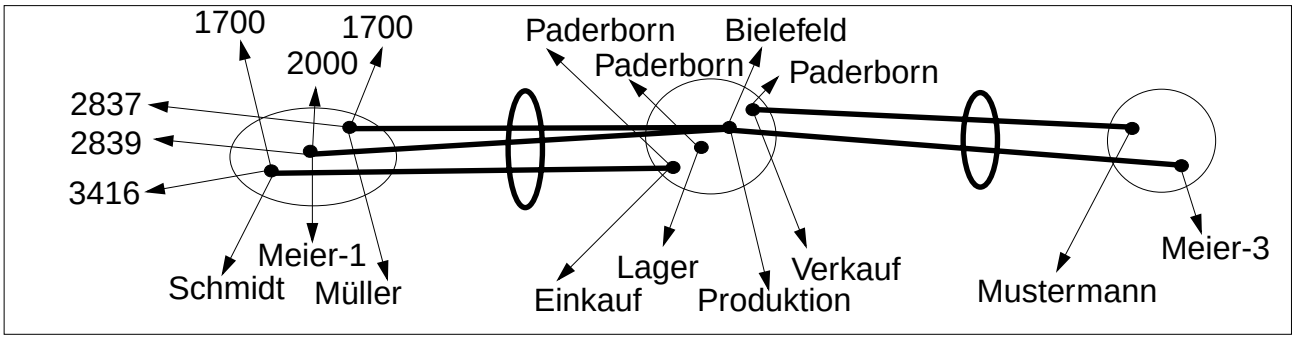
Einführendes Beispiel

Ausschnitt aus der **Modellierung** einer Firmenorganisation: [Beispiel nach J. D. Ullman: Principles ...]





Eine **konkrete Ausprägung** zu dem Modell:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 609

Ziele:

Erster Eindruck vom ER-Modell

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu dem Beispiel,
- Graphiken für die 3 Grundbegriffe,
- Modell und konkrete Ausprägung dazu.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

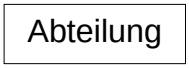
Entities

Entity:
Objekt, Gegenstand aus dem zu modellierenden **Aufgabenbereich**
Jede Entity hat eine **eindeutige Identität**, verschieden von allen anderen

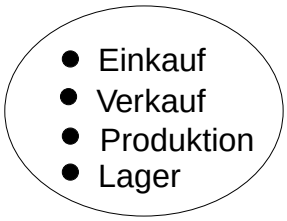
Entity-Menge (auch **Entity-Typ**):
Zusammenfassung von Objekten, die im Modell als **gleichartig** angesehen werden,
z. B. Angestellte, Abteilung, Manager

Im **Modell steht eine Entity-Menge** für die ggf. nicht-endliche Menge aller infrage kommenden Objekte dieser Art.

Eine **konkrete Ausprägung zu der Entity-Menge** ist eine endliche Teilmenge davon.



steht im Modell für die **Menge aller** in Unternehmen **möglichen Abteilungen**



konkrete Ausprägung dazu:
die **Menge der Abteilungen** eines konkreten Unternehmens

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 610

Ziele:

Entity-Mengen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

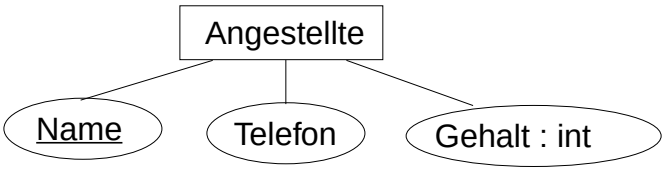
- zur Eindeutigkeit von Entities; Vergleich mit Objekten in Java,
- zu Entity-Mengen; Vergleich mit Klassen in Java,
- Vorsicht beim Vergleich mit Wertebereichen: Dort haben wir Potenzmengen als Wertebereich von konkreten Ausprägungen, die Mengen sind; hier haben wir auch im Modell Entity-Mengen.

nachlesen:

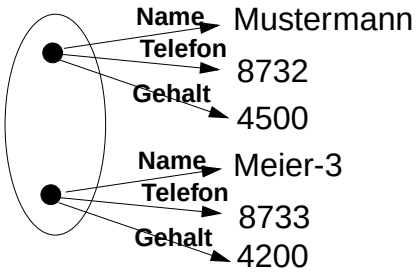
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

Attribute

Attribute beschreiben Eigenschaften von Entities.
Einer Entity-Menge im Modell können Attribute zugeordnet werden, z. B.



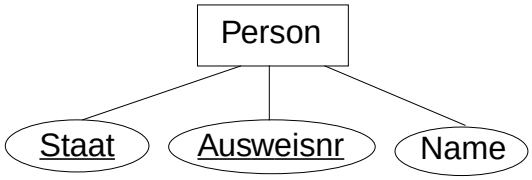
eine konkrete Ausprägung:



Ein Attribut ordnet jeder Entity aus der konkreten Entity-Menge einen Wert zu.
Der **Wertebereich eines Attributes** kann explizit angegeben sein, z. B. int für Gehalt, oder er wird passend angenommen.

Ein Attribut, dessen **Wert jede Entity eindeutig identifiziert**, heißt **Schlüsselattribut**.
Es wird im Modell unterstrichen.

Auch **mehrere Attribute zusammen** können den Schlüssel bilden:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 611

Ziele:

Attribute und ihre Werte verstehen

in der Vorlesung:

- Attribute bilden Entities auf Werte ab.
- Wertebereiche von Attributen wie in Kapitel 2 der Vorlesung.
- Derselbe Attributwert kann vielfach im System vorkommen - im Unterschied zu Objekten, die eindeutig identifizierbar sind.
- Wenn sich ein Schlüsselattribut bei der Modellierung nicht ohnehin natürlich ergibt, sollte man eines einführen (z. B. Nummer der Entities).

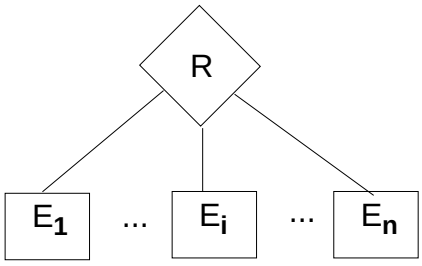
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

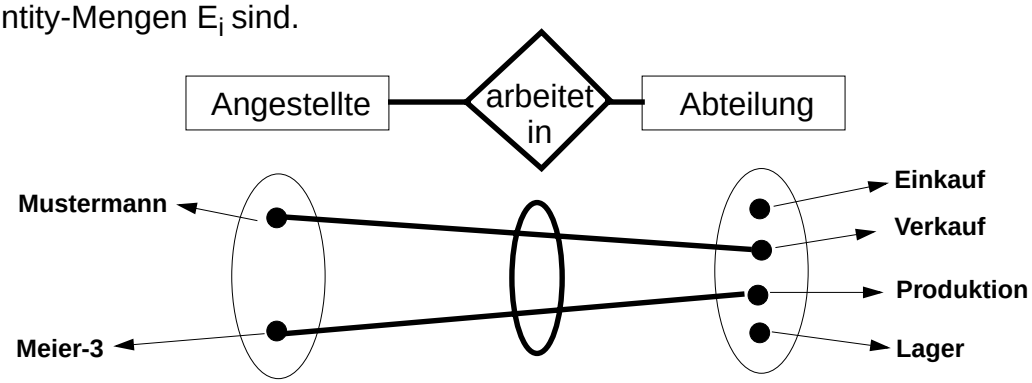
Relationen

Relationen modellieren Beziehungen zwischen den Entities der Entity-Mengen.

n-stellige Relation R
über n Entity-Mengen E_1,..., E_n, mit $n \geq 2$:
Im Modell wird dadurch der **Typ der Relation** angegeben.



Eine **konkrete Ausprägung von R** ist eine **Menge von n-Tupeln (e_1, ... , e_n)**, wobei die e_i Entities aus den konkreten Ausprägungen der Entity-Mengen E_i sind.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 612

Ziele:

Relationen im ER-Modell verstehen

in der Vorlesung:

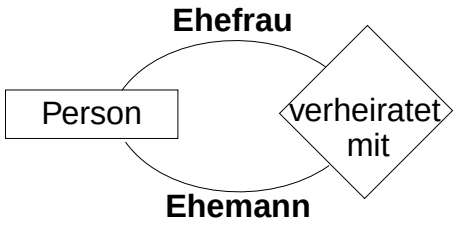
- Relationsbegriff entspricht dem aus Kapitel 2. Allerdings sind die Wertebereiche auf Entity-Mengen eingeschränkt.
- Die Graphik legt die Reihenfolge der Tupelkomponenten nicht fest; zusätzliche Information für die Textdarstellung.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

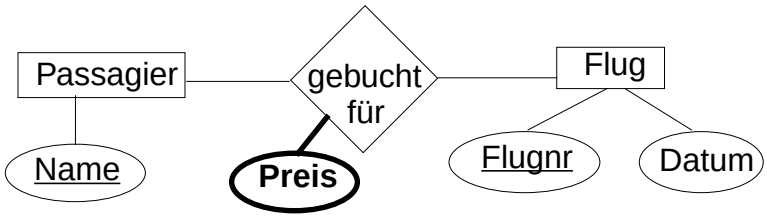
Rollen und Attribute in Relationen

Für manche Relationen wird aus ihrem Namen und der Graphik nicht klar, welche Bedeutung die Entity-Mengen in der Relation haben. Man kann das durch **Rollennamen an den Kanten** verdeutlichen.

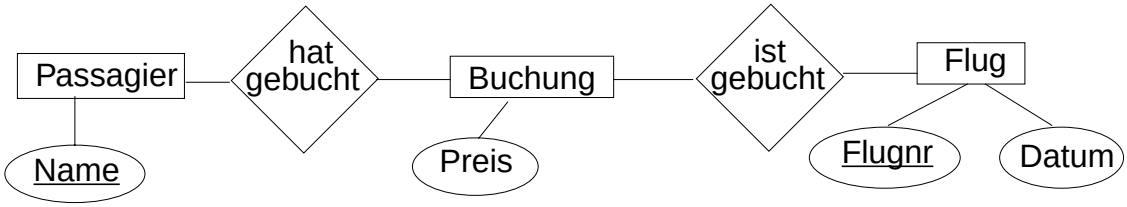


Auch **Relationen können Attribute haben**. Sie beschreiben **Eigenschaften zu jedem Tupel der Relation**.

Der Preis ist eine **Eigenschaft der Buchung** - nicht des Passagieres oder des Fluges.



Man könnte natürlich auch **Buchungen als Entities** modellieren:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 613

Ziele:

Modellierung von Relationen

in der Vorlesung:

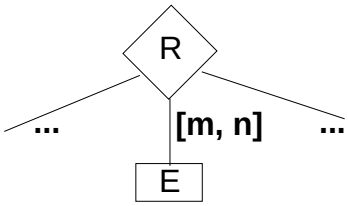
- Erläuterungen zu Rollen,
- zu Attributen von Relationen.
- Mit den beiden Varianten der Modellierung von Flugbuchungen kann man Unterschiedliches ausdrücken: In der unteren Variante kann derselbe Passagier denselben Flug mehrfach buchen. In der oberen Variante geht das nicht.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

Kardinalität von Relationen

In Relationen wird duch Angaben zur **Kardinalität** bestimmt, wie oft eine Entity in den Tupeln der Relation vorkommen kann bzw. vorkommen muss:



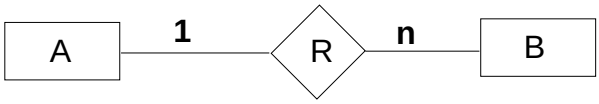
Für jede konkrete Ausprägung der Relation R muss gelten:
Jede Entity e aus der konkreten Entity-Menge zu E kommt
in mindestens m und höchstens n Tupeln vor.

Spezielle Kardinalitäten:

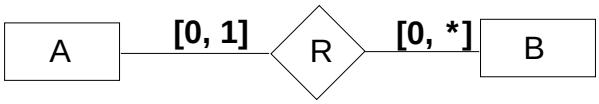
- [1, 1] in **genau einem** Tupel: totale Funktion von E auf die übrigen Rollen der Relation
- [0, 1] in **höchstens einem** Tupel: partielle Funktion von E auf die übrigen Rollen
- [0, *****] in **beliebig vielen** Tupeln

Ohne Angabe wird [0, *] angenommen.

Kurznotation für 2-stellige Relationen:



bedeutet:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 614

Ziele:

Kardinalitäten verstehen

in der Vorlesung:

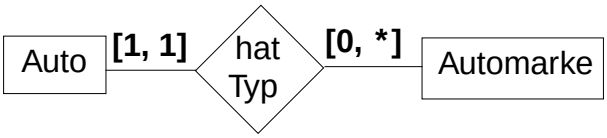
- Erläuterung von Kardinalitäten als einschränkende Präzisierung des Modells.
- Erläuterung an Beispielen von Mod-6.15
- Achtung: Es gibt ER-Dialekte, in denen dieselben Notationen eine andere Bedeutung haben: Anzahl der Tupel, die sich nur in Werten aus E unterscheiden. Wir verwenden sie hier nicht.

nachlesen:

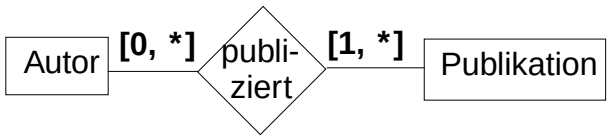
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

Beispiele zu Kardinalitäten in Relationen

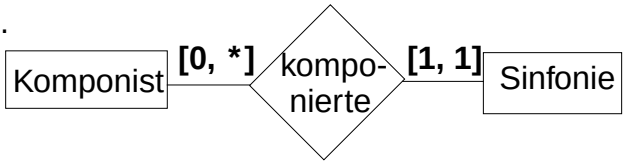
1.



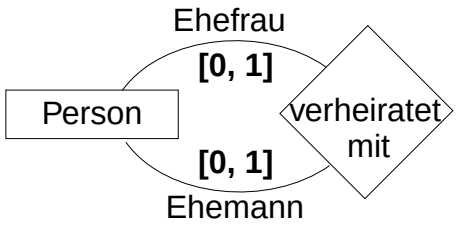
2.



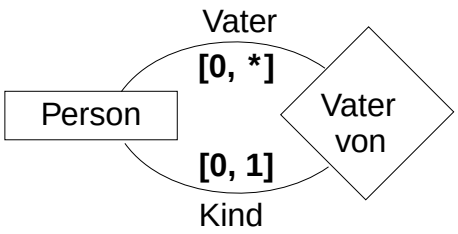
3.



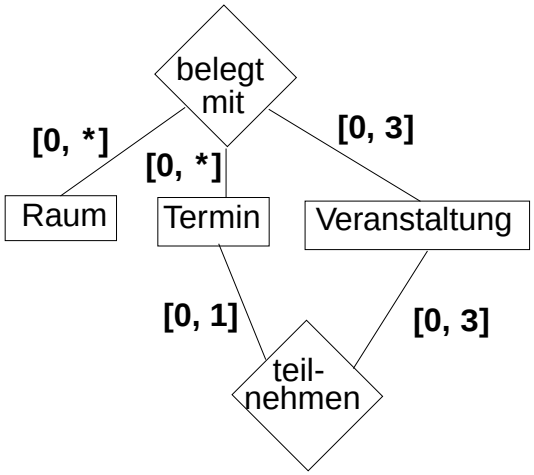
4.



5.



6.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 615

Ziele:

Kardinalitäten üben

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Relationen:

- Jedes Auto-Exemplar hat genau eine Automarke. (1)
- Zu einer Automarke können beliebig viele Autos modelliert sein (1).
- Eine Publikation hat mindestens einen Autor (2).
- Eine Sinfonie stammt von genau einem Komponisten (3).
- Es gibt auch unverheiratete Personen (4).
- Polygamie ist in diesem Modell nicht vorgesehen (4).
- Die Väter mancher Personen sind nicht modelliert (5).
- Veranstaltungen werden höchstens dreimal pro Woche angeboten (6).
- Im Stundenplan eines Teilnehmers sind Termine nicht mehrfach belegt (6).

nachlesen:

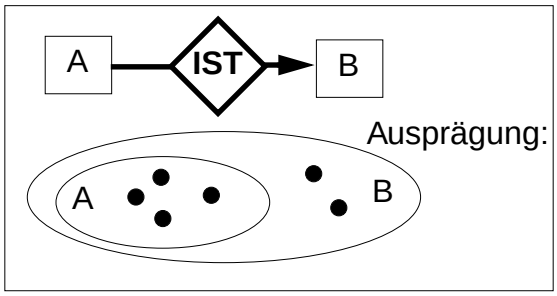
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

IST-Hierarchie

Die spezielle **Relation IST** (engl. is-a) definiert eine **Spezialisierungs-Hierarchie** für Entity-Mengen:

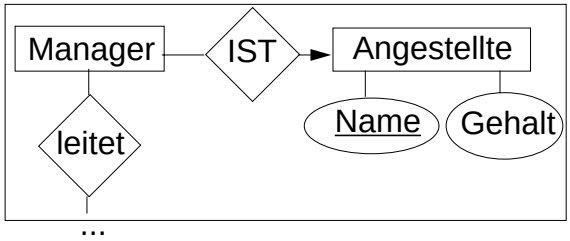
A IST B: Einige Entities der **allgemeineren Menge B** gehören auch der **spezielleren Menge A** an.

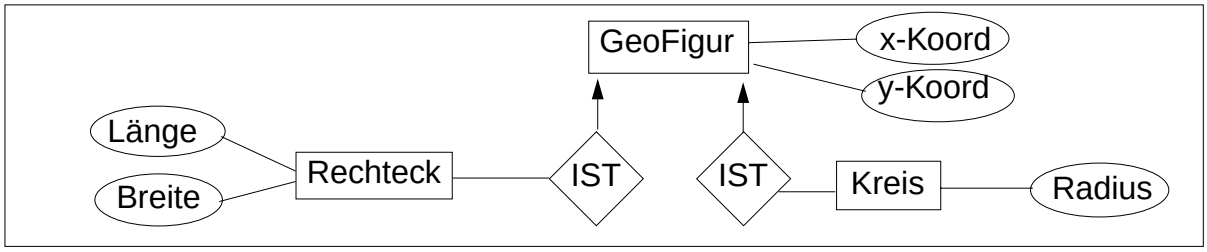
Jede konkrete Ausprägung zu A ist **Teilmenge** der konkreten Ausprägung zu B.
Es kann Entities in B geben, die nicht in A sind.



Die **Entities in A „erben“ alle Attribute von B** und können noch weitere Attribute haben, die **spezielle A-Eigenschaften** beschreiben.

Auch **Schlüsselattribute** werden als solche **geerbt**.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 616

Ziele:

Konzept der Spezialisierung verstehen

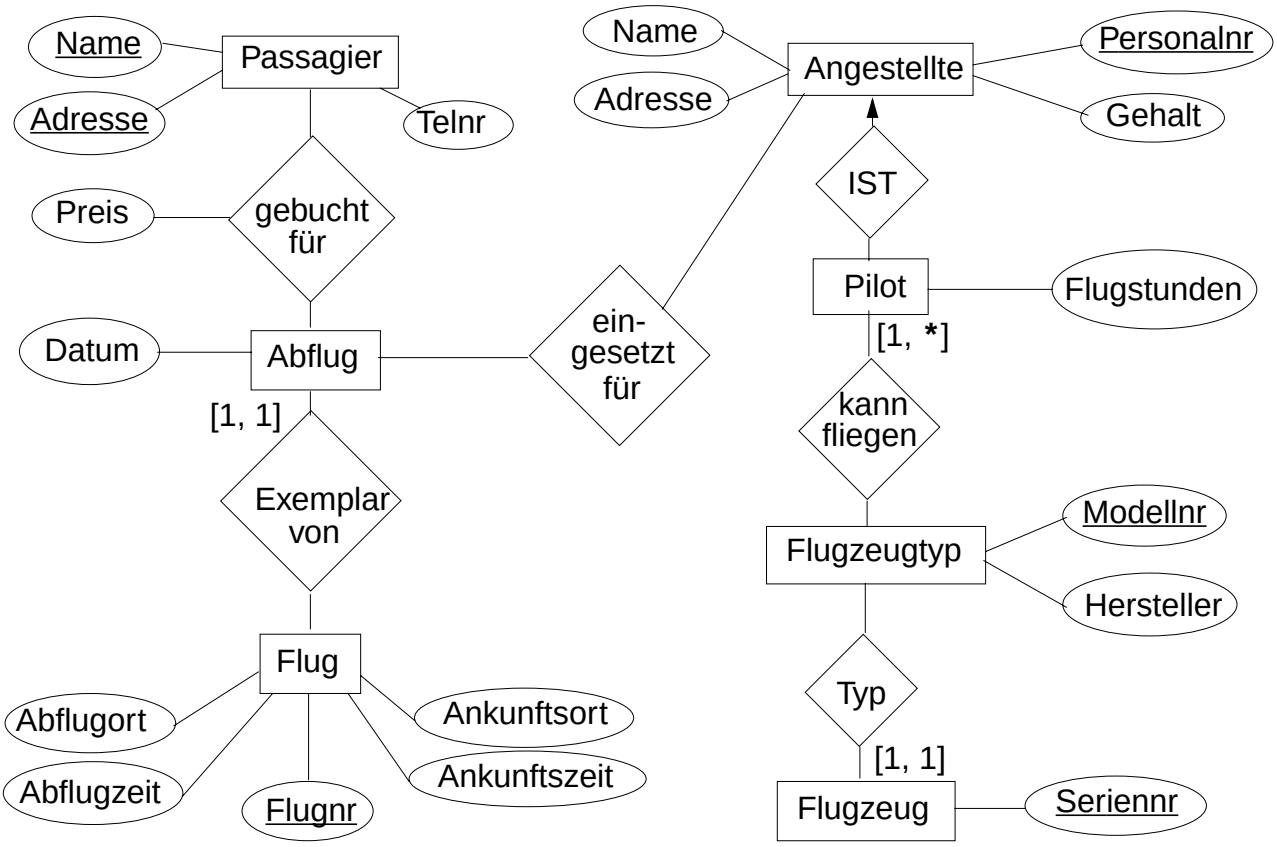
in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu.
- Jede Entity existiert weiterhin nur einmal. Sie kann aber zu mehreren Mengen (A und B) gehören.
- Bei der Modellierung von mehreren IST-Relationen zu derselben allgemeinen Entity-Menge sind die speziellen Mengen meist disjunkt (z. B. Rechteck und Kreis). Das ist aber formal nicht vorgeschrieben.
- Entspricht der Vererbung zwischen Ober- und Unterklassen in objektorientierten Programmiersprachen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

Beispiel: Fluggesellschaft



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 617

Ziele:

ER-Modellierung im Zusammenhang sehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

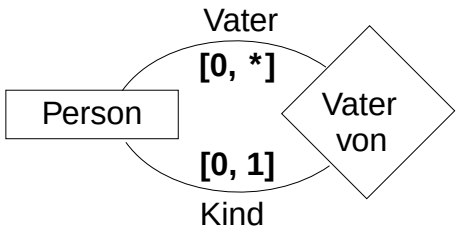
- Schema: "Exemplar von", "Typ"
- Schlüsselattributen

nachlesen:

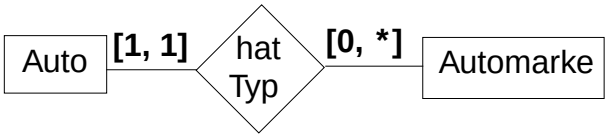
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

Hinweise zur Modellierung mit ER

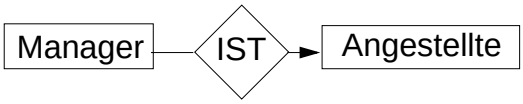
- In einem ER-Modell kommt **jede Entity-Menge nur einmal** vor.
- **Rollen** zu Relationen **angeben**, wo es nötig ist.
- Bedeutung der Kardinalitäten klarstellen.



- **Typ - Exemplar - Relationen** bewusst einsetzen.



- **Spezialisierung** sinnvoll einsetzen.



- Typ - Exemplar - Relation **nicht** mit Spezialisierung **verwechseln**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 618

Ziele:

Einige Modellierungsregeln

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu mit Hinweis auf Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 6.2

6.4 Klassendiagramme in UML
Übersicht

1. **UML (Unified Modelling Language)**:
   die derzeit wichtigste Sprache zur **Modellierung von Systemen**
2. Als **Zusammenfassung mehrerer Modellierungssprachen**
   1997 in der Version 1.1 definiert;
   Version 2.0 von 2005 ist Grundlage aktueller UML-Versionen.
3. ***Object Management Group*** macht aktuelle Dokumente zu UML verfügbar:
   Object Management Group: UML Resource Page. www.uml.org (2010)
4. UML umfasst **13 Teilsprachen (*Diagrammtypen*)**, um unterschiedliche Aspekte von Systemen zu beschreiben, z. B.
   Klassendiagramme für Systemstruktur, statische Eigenschaften und Beziehungen,
   Statecharts für Abläufe von Operationen.
5. Für den Gebrauch durch Menschen hat UML graphische Notationen (visuelle Sprachen); Software-Werkzeuge verwendendie XML Sprache **XMI (XML Metadata Interchange)**
6. **Einführendes Buch**:
   Chris Rupp, Stefan Queins, Barbara Zengler:
   UML 2 glasklar. 3. Auflage; Carl Hanser Verlag (2007)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 619

Ziele:

Zweck und Entwicklung von UML

in der Vorlesung:

- Die angegebenen Aspekte werden erläutert.

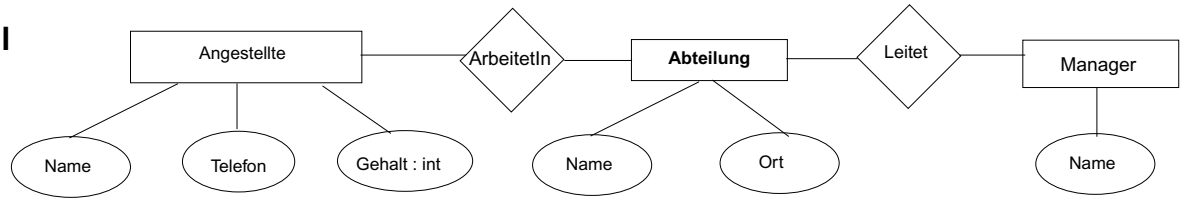
Bezug zum ER-Modell

Klassendiagramme dienen zur Modellierung von
Systemstruktur, **statischen Eigenschaften** und **Beziehungen**.

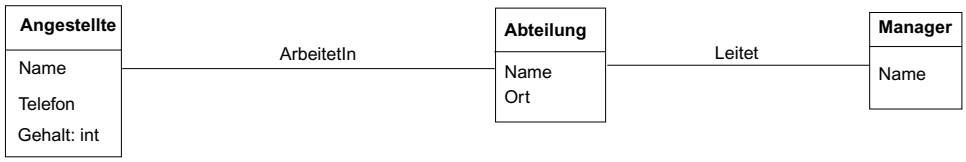
Sie basieren auf den gleichen Grundkonzepten wir das Entity-Relationship-Modell:

ER-Modell	UML Klassendiagramm
Entity-Menge	Klasse
Attribut	Attribut
Relation	Assoziation

ER-Modell



UML Klassendiagramm



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 620

Ziele:

Gegenüberstellung: ER - UML Klassendiagramm

in der Vorlesung:

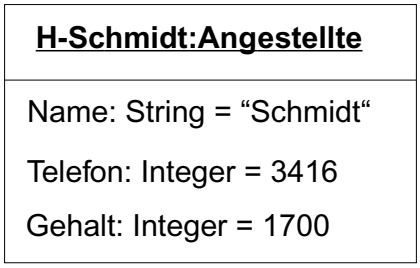
- Der Vergleich wird erläutert.

Klasse mit Attributen

Klasse: repräsentiert eine Menge gleichartiger Objekte (wie im ER-Modell);

Attribute (und ggf. Operationen) werden im Rechteck der Klasse angegeben.

Objekte einer Klasse werden so dargestellt:



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 621

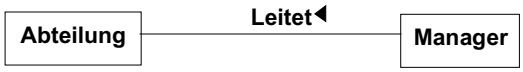
Ziele:

Notation für Klassen mit Attributen

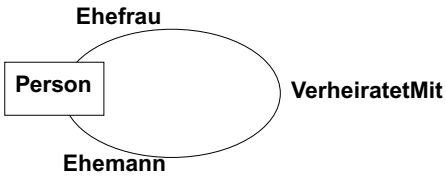
in der Vorlesung:

- Bedeutung wie im ER-Kalkül.
- In UML: Klassen keine Schlüsselattribute.
- In UML: Notation für Objekte.

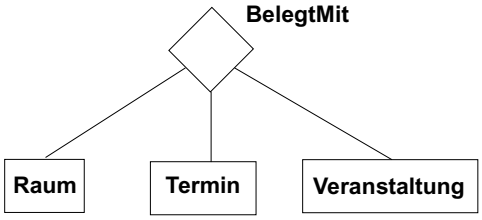
Assoziationen



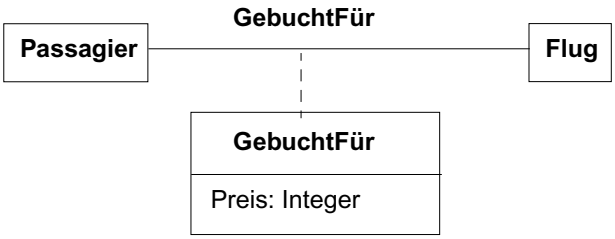
zweistellig
◀ gibt die Leserichtung an



zweistellig
mit Angabe der Rollen



mehrstellig



Assoziation mit Attributen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 622

Ziele:

Notationen für Assoziationen

in der Vorlesung:

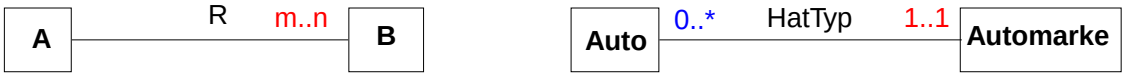
- Die Konstrukte werden erläutert.

Kardinalität von 2-stelligen Assoziationen

ER:

Jedes Objekt aus A kommt in den Tupeln der Relation R
mindestens m und höchstens n mal vor.

UML:



Jedem Objekt aus A ordnet die Relation R
mindestens m und höchstens n
verschiedene Objekte aus B zu.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 623

Ziele:

Kardinalität von 2-stelligen Assoziationen

in der Vorlesung:

Vergleich zwischen ER und UML:

- Bei gleicher Bedeutung wird die Kardinalitätsangabe an der anderen Klasse der Assoziation angebracht.

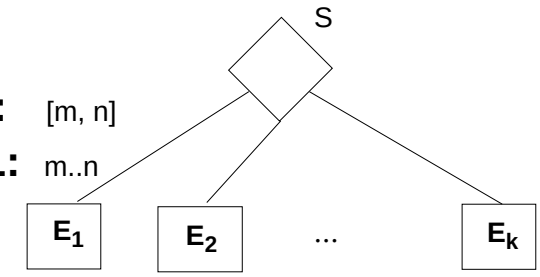
Kardinalität von k-stelligen Assoziationen

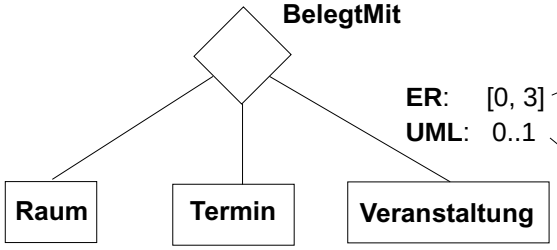
Jedes Objekt aus E1 kommt in den Tupeln der Relation S mindestens m und höchstens n mal vor.

ER: [m, n]

UML: m..n

Jeder Kombination von Objekten aus E2, ..., En ordnet die Relation S mindestens m und höchstens n Objekte aus E1 zu.





ER: [0, 3]
UML: 0..1

Für jede Veranstaltung sind zwischen 0 und 3 Raum-Termin-Kombinationen vorgesehen. (nicht in UML formulierbar)

Für jede Raum-Termin-Kombination ist höchstens eine Veranstaltung vorgesehen. (nicht in ER formulierbar)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 624

Ziele:

Kardinalität von k-stelligen Assoziationen

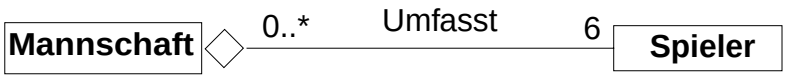
in der Vorlesung:

Vergleich zwischen ER und UML:

- Kardinalitätsangaben an derselben Klasse habe in ER und in UML unterschiedliche Bedeutung.

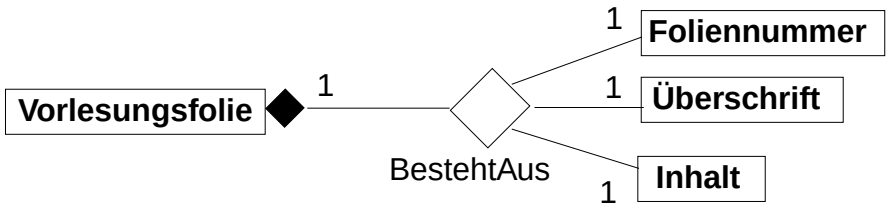
Aggregation und Komposition

Aggregation: Objekte werden zu einem größeren Objekt zusammengefasst. sie können prinzipiell auch allein existieren.



- Eine Mannschaft umfasst immer 6 Spieler
- Ein Spieler kann einer, mehreren oder auch keiner Mannschaft angehören

Komposition: Jedes Teilobjekt gehört unverzichtbar zu genau einem ganzen Objekt.



Eine Vorlesungsfolie besteht immer aus einer Foliennummer, einer Überschrift und dem Folieninhalt.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 625

Ziele:

Aggregation und Komposition unterscheiden

in der Vorlesung:

Zwei verschiedene Assoziationen, die "enthalten" ausdrücken:

- Unterschiedliche Bedeutungen werden erläutert.

Generalisierung, Spezialisierung

Die Generalisierung (Spezialisierung) dient zur Modellierung von **Abstraktionshierarchien** (wie die **IST**-Relation in ER):

SK1 und SK2 sind **speziellere** Arten der **allgemeineren** GK.

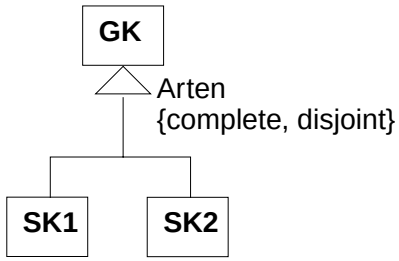
GK heißt auch **Oberklasse** der **Unterklassen** SK1 und SK2.

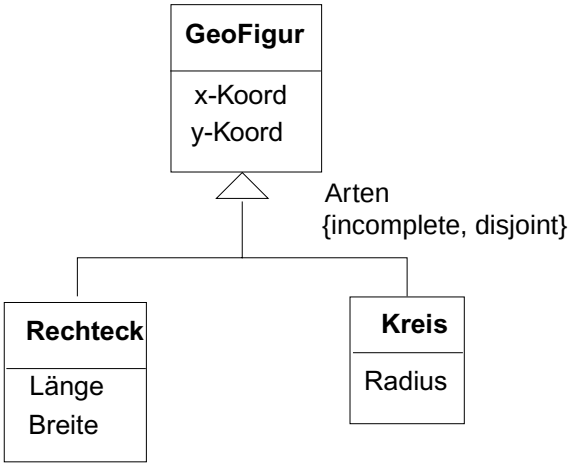
Die Assoziation kann **benannt** werden, hier *Arten*.

Hinsichtlich der Objekte gilt: SK1 und SK2 sind **Teilmengen** von GK.

Das Verhältnis der Unterklassen zueinanderkann weiter charakterisiert werden:

- ***disjoint***: Die Teilmengen sind paarweise disjunkt.
- ***complete***: Es gibt in dem Modell **keine weiteren Unterklassen** von GK





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 626

Ziele:

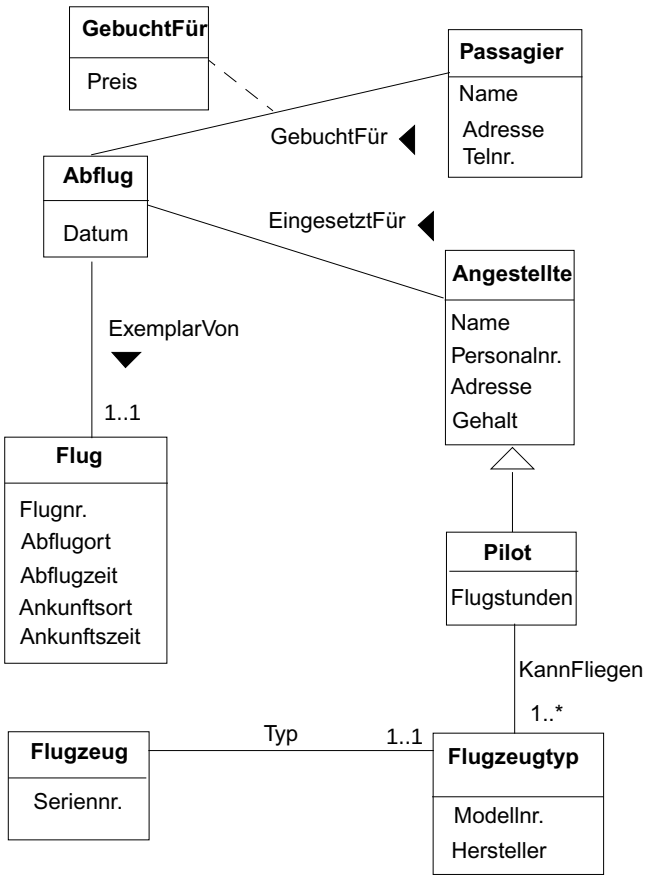
Generalisierung verstehen

in der Vorlesung:

- Vergleich mit IST in ER;
- Betrachtungsrichtung Generalisierung oder Spezialisierung
- Beispiel für nicht-disjunkte Unterklassen: XK als gemeinsame Unterklasse von SK1 und SK2 definieren macht SK1 und SK2 potenziell nicht-disjunkt.
- Unterklassen zu GK können an verschiedenen Stellen angegeben werden.

Modell einer Fluggesellschaft

vergl. Folie 6.17



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 627

Ziele:

Ein Beispiel im Zusammenhang

in der Vorlesung:

- Erläuterungen und Vergleich mit ER Folie 6.17

7 Modellierung von Abläufen
7.1 Endliche Automaten

Endlicher Automat:
Formaler Kalkül zur **Spezifikation von realen oder abstrakten Maschinen**. Sie

- reagieren auf **äußere Ereignisse**,
- ändern ihren **inneren Zustand**,
- produzieren ggf. **Ausgabe**.

Endliche Automaten werden **eingesetzt**, um

- das **Verhalten realer Maschinen** zu spezifizieren, z. B. Getränkeautomat,
- das **Verhalten von Software-Komponenten** zu spezifizieren,
  z. B. Reaktionen von Benutzungsoberflächen auf Bedienereignisse,
- **Sprachen zu spezifizieren**: Menge der Ereignis- oder Symbolfolgen, die der Automat akzeptiert, z. B. Schreibweise von Bezeichnern und Zahlwerten in Programmen

Zunächst definieren wir nur die **Eingabeverarbeitung** der Automaten;
das Erzeugen von **Ausgabe** fügen wir **später** hinzu.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 701

Ziele:

Charakterisierung endlicher Automaten

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

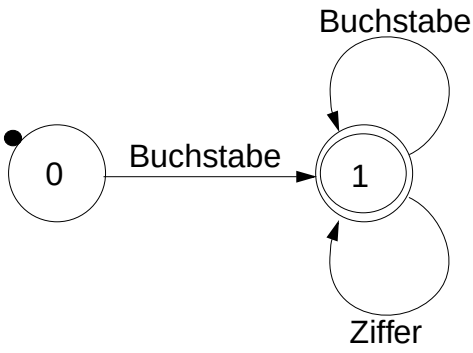
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Zwei einführende Beispiele

Endlicher Automat definiert eine **Sprache**, d. h. eine Menge von Wörtern.
Ein Wort ist eine Folge von Zeichen.

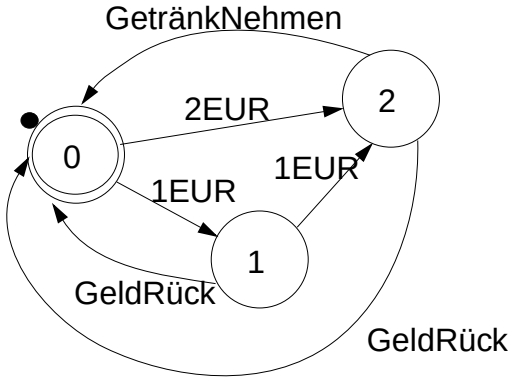
Hier: **Bezeichner** in Pascal-Programmen:



Akzeptiert Folgen von Buchstaben und Ziffern beginnend mit einem Buchstaben.

Endlicher Automat spezifiziert das **Verhalten einer Maschine**.

Hier: einfacher **Getränkeautomat**:



Akzeptiert Folgen von Ereignissen zur Bedienung eines Getränkeautomaten

Endliche Automaten können durch **gerichtete, markierte Graphen** dargestellt werden, **Ablaufgraphen**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 702

Ziele:

Eindruck von Automaten und ihrer Darstellung

in der Vorlesung:

Informelle Erläuterungen zu

- Zuständen,
- Übergängen,
- äußeren Ereignissen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Alphabete

Alphabet:

Eine **Menge von Zeichen** zur Bildung von Zeichenfolgen, häufig mit Σ bezeichnet.

Wir betrachten hier nur endliche Alphabete, z. B.

{0, 1}
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
{a, b, ..., z}

Ein Wort über einem Alphabet Σ ist eine **Zeichenfolge** aus Σ^*

statt $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma^*$ schreiben wir $a_1\ a_2\ ...\ a_n$,
z. B. $10010 \in \{0, 1\}^*$

für die leere Folge schreiben wir auch ε (epsilon)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 703

Ziele:
Wörter über Alphabeten

in der Vorlesung:
Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Reguläre Ausdrücke

R**eguläre Ausdrücke** beschreiben **Mengen von Worten**, die nach bestimmten Regeln aufgebaut sind. Seien F und G reguläre Ausdrücke, dann gilt

regulärer Ausdruck	**Menge von Worten**	**Erklärung**
a	{ a }	Zeichen a als Wort
ε	{ ε }	das leere Wort
F | G	$\{ f \mid f \in F \} \cup \{ g \mid g \in G \}$	Alternativen
F G	$\{ f\,g \mid f \in F, g \in G \}$	Zusammenfügen von Worten
F^n	$\{ f_1 f_2 ... f_n \mid \forall i \in \{1,..n\}: f_i \in F \}$	n Worte aus F
F*	$\{ f_1 f_2 ... f_n \mid n \geq 0$ und $\forall i \in \{1,..n\}: f_i \in F \}$	Folgen von Worten aus F
F^+	$\{ f_1 f_2 ... f_n \mid n \geq 1$ und $\forall i \in \{1,..n\}: f_i \in F \}$	nicht-leere Folgen von Worten aus F
(F)	F	Klammerung

Beispiele: 1^3 (1 | 0)* 0^3

Bezeichner = B (B | D)* mit B = a | b | ... | z und D = 0 | 1 | ... | 9

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 704

Ziele:

Einfache Beschreibung von Wortmengen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- rekursiver Definition von regulären Ausdrücken,
- Hintereinanderschreibung von Zeichen und Teilworten,
- Folgen von Worten,
- Alternativen,
- Namen für reguläre Ausdrücke

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Verständnisfragen:

Unterscheiden Sie:

- das leere Wort,
- die leere Menge,
- die Menge, die nur das leere Wort enthält.

Deterministischer endlicher Automat

Deterministischer endlicher Automat (engl.: deterministic finite automaton, DFA):

Quintupel **$A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$** mit

Σ	endliches **Eingabealphabet**
Q	endliche **Menge von Zuständen**
δ	**Übergangsfunktion** aus $Q \times \Sigma \rightarrow Q$
$q_0 \in Q$	**Anfangszustand**
$F \subseteq Q$	**Menge der Endzustände** (akzeptierend)

Wir nennen $r = \delta(q, a)$ **Nachfolgezustand von q unter a**.

A heißt **deterministisch, weil** es **zu jedem Paar (q, a)**, mit $q \in Q$, $a \in \Sigma$, **höchstens einen Nachfolgezustand** $\delta(q, a)$ gibt, d. h. δ ist eine **Funktion in Q.**

A heißt **vollständig, wenn** die **Übergangsfunktion** δ eine **totale** Funktion ist.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 705

Ziele:

Formale Definition verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- den Komponenten des 5-Tupels,
- dem Begriff "deterministisch",
- der Eigenschaft "vollständig"

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Gerichteter Graph zu endlichem Automaten

Knoten: **Zustände** des Automaten; Anfangszustand und Endzustände werden speziell markiert
Kanten: **Übergangsfunktion**, q -> r markiert mit a, genau dann wenn δ(q, a) = r
Es gibt Kanten, die sich nur durch ihre Markierung unterscheiden, deshalb: **Multigraph**

Beispiele von Mod-7.2:

Σ := Menge der ASCII-Zeichen

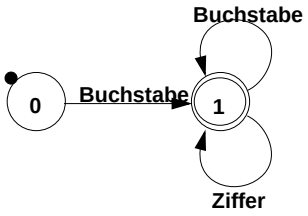
Q := {0, 1}

δ :=

	a...zA...Z	0...9	sonstige
0	1		
1	1	1	

q_0 = 0

F = {1}



Buchstabe, Ziffer
sind Namen reg. Ausdrücke

Σ := {**1EUR, 2EUR, GeldRück, GetränkNehmen**}

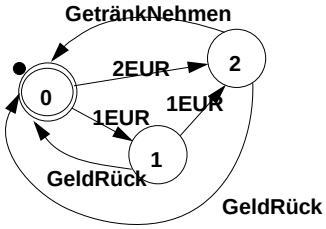
Q := {0, 1, 2}

δ :=

	1EUR	**2EUR**	**GeldRück**	**GetränkNehmen**
0	**1**	**2**		
1	**2**		**0**	
2			**0**	**0**

q_0 = 0

F = {0}



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 706

Ziele:

Graphdarstellung verstehen

in der Vorlesung:

- Übergangsfunktion ist als Tabelle angegeben
- Markierung von Anfangs- und Endzuständen
- Zusammenfassung von Zeichen mit gleichen Übergängen zu Zeichenklassen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Akzeptierte Sprache

Die Zeichen einer Zeichenfolge bewirken nacheinander Zustandsübergänge in Automaten.
Zustandsübergangsfunktion erweitert für Zeichenfolgen:

Sei $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ eine **Übergangsfunktion für Zeichen**,
dann ist $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ eine **Übergangsfunktion für Wörter**, rekursiv definiert:

- Übergang mit dem **leeren Wort**: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ für alle $q \in Q$
- Übergang mit dem **Wort wa**: $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$ für alle $q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Statt $\hat{\delta}$ schreiben wir meist auch δ.

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat und $w \in \Sigma^*$.
A akzeptiert das Wort w genau dann, wenn $\delta(q_0, w) \in F$.
Die Menge $L(A) := \{ w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F \}$ heißt die **von A akzeptierte Sprache**.

Beispiele für Sprachen, die von endlichen Automaten akzeptiert werden können:

$L_1 = a^+ b^+ = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} a^n b^m$ $L_2 = \Sigma^*$

Es gibt keinen endlichen Automaten, der $L_3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} a^n b^n$ akzeptiert.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 707

Ziele:

Sprache eines endlichen Automaten verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen

- zur Übergangsfunktion für Wörter,
- zur Sprache des Automaten,
- zu Beispielen

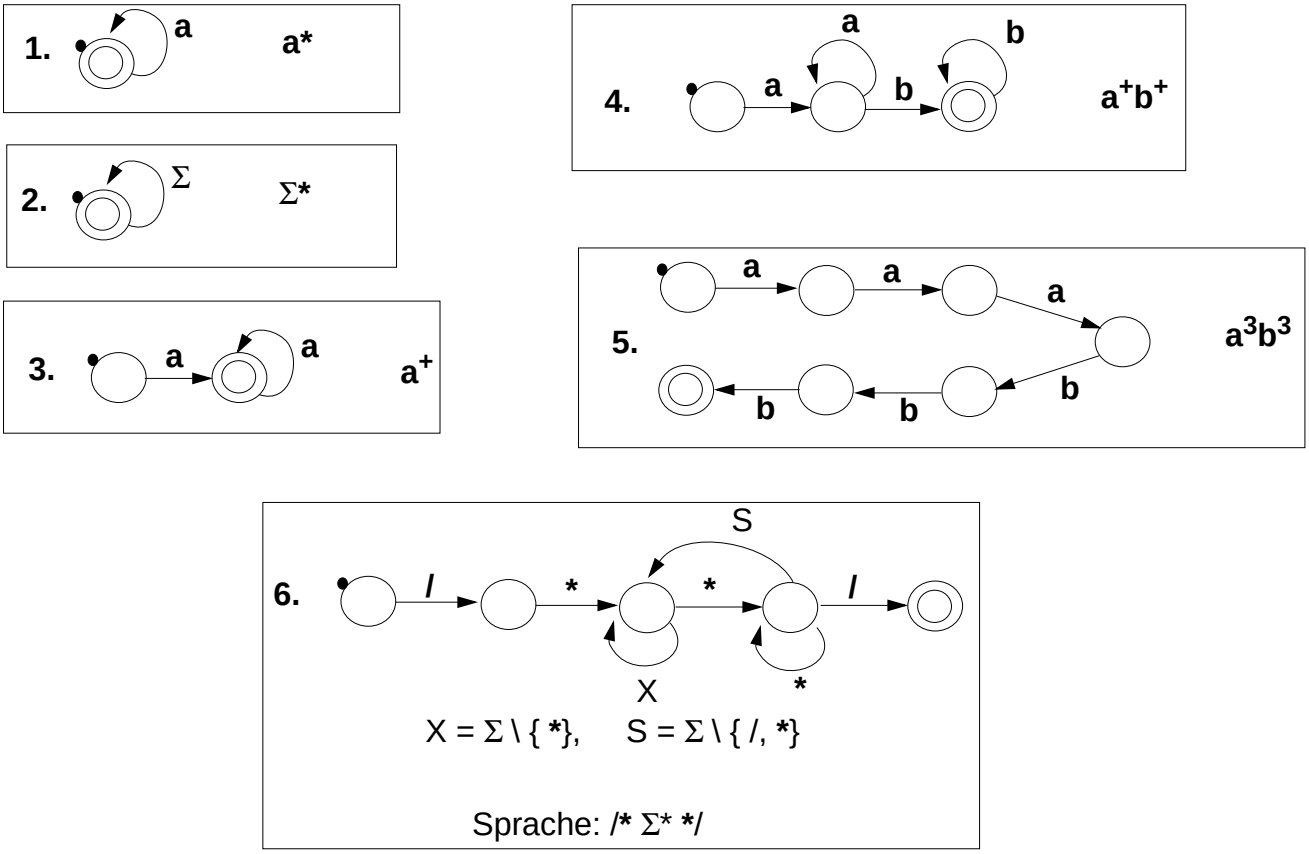
In der Praxis werden Automaten meist nicht vollständig (siehe Mod-7.5) angegeben. Sie arbeiten dann nach der **Regel des längsten Musters**, d. h.:

- Der Automat macht Übergänge, solange sie für die Eingabe definiert sind.
- Der zuletzt durchlaufene Endzustand bestimmt das akzeptierte Wort.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Beispiele: Endliche Automaten und ihre Sprachen



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 708

Ziele:

Sprachen endlicher Automaten verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zur Sprache der Automaten

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Nicht-deterministischer Automat

Nicht-deterministisch (allgemein) :
Es gibt mehrere Möglichkeiten der Entscheidung bzw. der Fortsetzung,
es ist aber nicht festgelegt, welche gewählt wird.

Nicht-deterministischer endlicher Automat:
Die **Übergangsfunktion** δ kann einen Zustand q und ein Eingabezeichen a auf **mehrere Nachfolgezustände** abbilden $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Pow(Q)$.
Welcher gewählt wird, ist nicht festgelegt.
Σ , Q, q_0, F sind wie für deterministische endliche Automaten definiert.

Erweiterung von δ auf Zeichenfolgen:

Sei $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein nicht-deterministischer endlicher Automat; dann ist $\hat{\delta}$ definiert:

- Übergang mit dem **leeren Wort**: $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{ q \}$ für alle $q \in Q$
- Übergang mit dem **Wort wa**: $\hat{\delta}(q, wa) = \{q' \in Q \mid \exists p \in \hat{\delta}(q, w): q' \in \delta(p, a)\}$
  für alle $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$,
  d. h. **die Menge aller Zustände, die man von q mit wa erreichen kann**

Wir schreiben meist δ für $\hat{\delta}$

Ein nicht-deterministischer endlicher Automat A **akzeptiert** ein Wort w gdw. $\delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$
$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$ ist **die von A akzeptierte Sprache**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 709

Ziele:

Nicht-Determiniertheit verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen

- zur Übergangsfunktion an Beispielen,
- zur Erweiterung der Übergangsfunktion,
- zur Nicht-Determiniertheit im Automaten und im allgemeinen.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

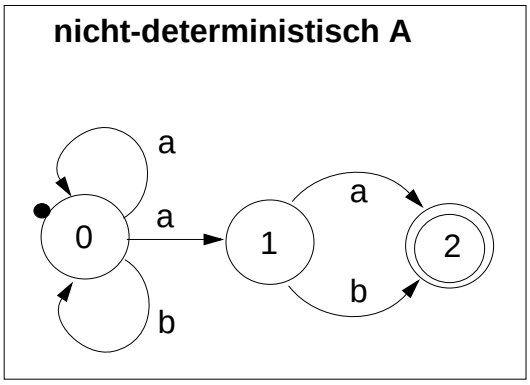
Nicht-deterministische und deterministische Automaten

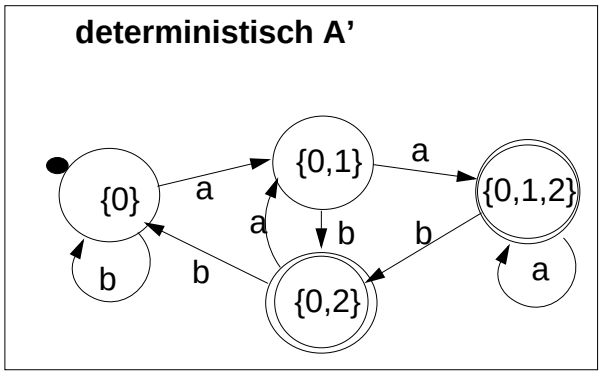
Satz: Sei L(A) die Sprache eines nicht-deterministischen Automaten.
Dann gibt es einen deterministischen Automaten, der L(A) akzeptiert.

Man kann **aus einem nicht-deterministischen Automaten A** = (Σ , Q , δ, q_0 , F)
einen **deterministischen A'** = (Σ, Q', δ', q_0', F') systematisch **konstruieren**:

Jeder **Zustand aus Q' repräsentiert eine Menge von Zuständen aus Q, d. h. Q' $\subseteq$ Pow(Q)**

Beispiel:





Die Zahl der Zustände kann sich dabei **exponentiell** vergrößern.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 710

Ziele:

Zusammenhang der Automaten verstehen

in der Vorlesung:

(Zusammen mit Mod-7.11)

- Zusammenhang: Zustand - Menge von Zuständen,
- Beispiel erläutern.
- L(A): Wörter über {a, b}*, deren zweitletztes Zeichen ein a ist.
- Bei n-letztem Zeichen benötigt der deterministische Automat 2 hoch n Zustände.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Konstruktion deterministischer Automaten

Sei A ein **nicht-deterministischer Automate A** = (Σ , Q , δ, q_0 , F) daraus wird ein **deterministischer Automat A'** = (Σ, Q', δ', q_0', F') systematisch **konstruiert**:

Jeder **Zustand aus Q' repräsentiert eine Menge von Zuständen aus Q, d. h. Q' $\subseteq$ Pow(Q)**

Konstruktionsschritte:

1. **Anfangszustand**: $q_0' = \{q_0\}$
2. Wähle einen schon konstruierten Zustand $q' \in Q'$
   wähle ein Zeichen $a \in \Sigma$

   berechne $r' = \delta'(q', a) = \bigcup_{q \in q'} \delta(q, a)$

   d. h. r' repräsentiert die Vereinigung aller Zustände, die in A von q unter a erreicht werden. r' wird **Zustand in Q'** und $\delta'(q', a) = r'$ wird **Übergang in δ'**.
3. **Wiederhole (2) bis keine neuen Zustände oder Übergänge** mehr konstruiert werden können.
4. **Endzustände**: $F' = \{q' \in Q' \mid q' \cap F \neq \emptyset\}$
   d. h. q' ist Endzustand, wenn seine Zustandsmenge einen Endzustand von A enthält.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 711

Ziele:

Konstruktionsprinzip verstehen

in der Vorlesung:

(Zusammen mit Mod-7.10 und 7.11a)

- Erläuterungen zur Konstruktion,
- Konstruktion am Beispiel,

Dies ist ein Beispiel für ein wichtiges, induktives Konstruktionsschema:

- Gegeben eine Regel und ein Anfangswert.
- Wende die Regel an, solange sich noch etwas Neues ergibt.

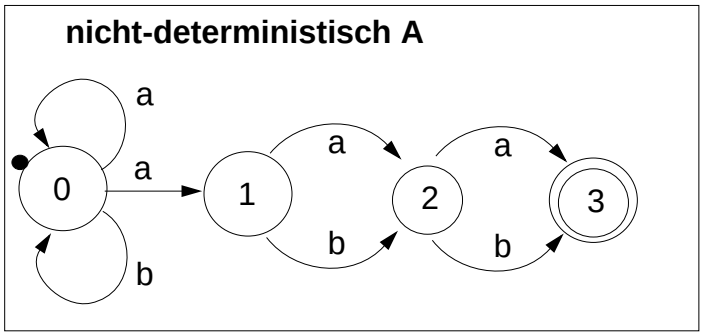
nachlesen:

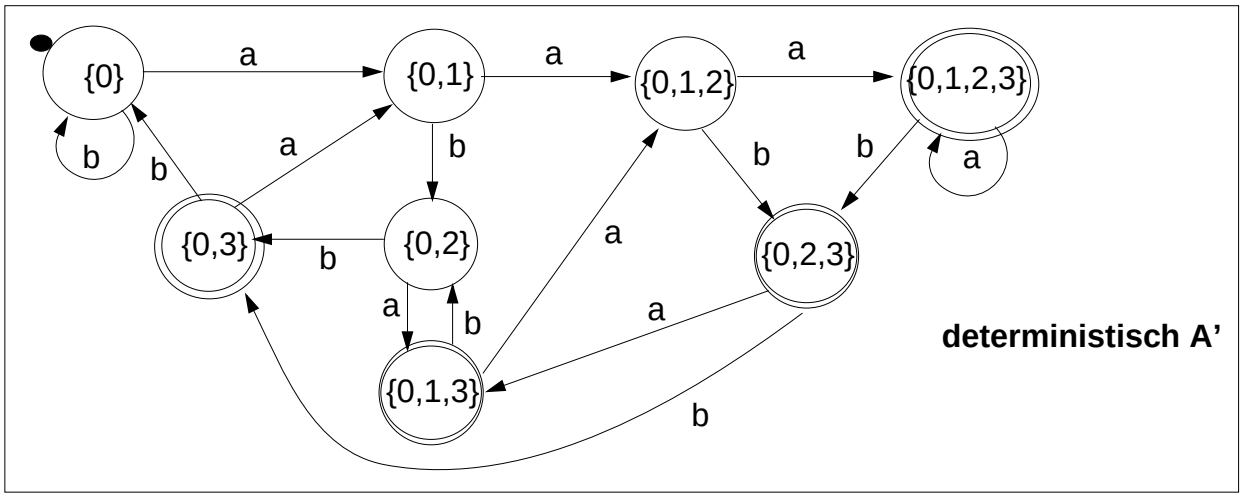
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Beispiel zur Konstruktion NDEA -> DEA

Sprache: (a | b)* a (a | b)^2

Worte w über {a, b} mit |w| > 2 und drittletztes Zeichen ist ein a





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 711a

Ziele:

Konstruktionsprinzip am Beispiel verstehen

in der Vorlesung:

(Zusammen mit Mod-7.11)

- Erläuterungen zur Konstruktion,
- Konstruktion am Beispiel,

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Endliche Automaten mit Ausgabe

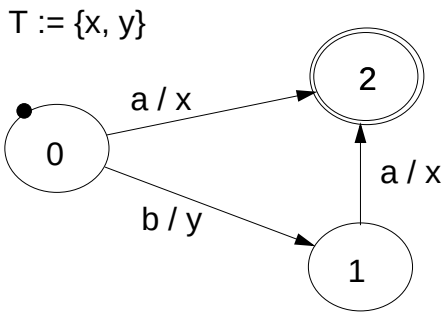
Man kann mit endlichen Automaten auch **Reaktionen der modellierten Maschine** spezifizieren: **Automaten mit Ausgabe**.

Wir erweitern den Automaten um ein **endliches Ausgabealphabet T** und um eine Ausgabefunktion. Es gibt 2 Varianten für die Ausgabefunktion:

Mealy-Automat:

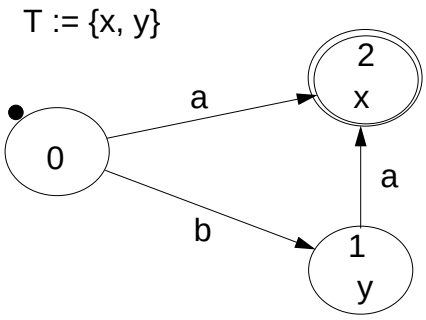
Eine Ausgabefunktion $\lambda : Q \times \Sigma \rightarrow T^*$ ordnet den **Zustandsübergängen** jeweils ein **Wort über dem Ausgabealphabet** zu.

Graphische Notation:



Moore-Automat:

Eine Ausgabefunktion $\mu : Q \rightarrow T^*$ ordnet den **Zuständen** jeweils ein **Wort über dem Ausgabealphabet** zu. Es wird bei Erreichen des Zustands ausgegeben.



Ein **Mealy-Automat kann die Ausgabe feiner differenzieren** als ein Moore-Automat.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 712

Ziele:

Zwei Ausgabevarianten

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu;
- Wenn keine Ausgabe angegeben ist, wird das leere Wort als Ausgabe angenommen.
- Mealy- und Moore-Automaten werden auch so definiert, dass jeweils ein Zeichen statt ein Wort ausgegeben werden.

nachlesen:

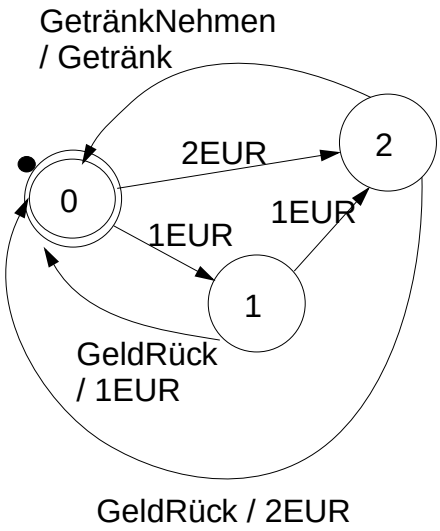
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Beispiele für endliche Automaten mit Ausgabe

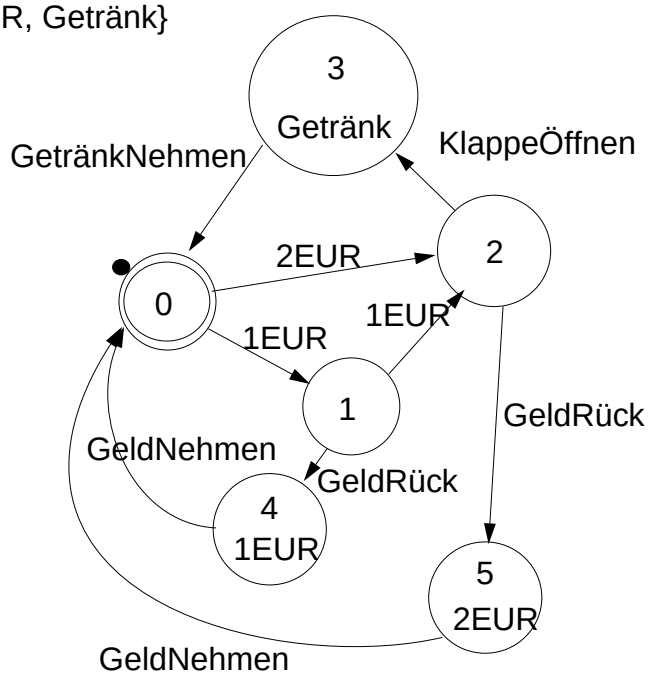
Die Spezifikation des Getränkeautomaten aus Mod-7.2 wird mit Ausgabe versehen:

Mealy-Automat

T = {1EUR, 2EUR, Getränk}



Moore-Automat



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 713

Ziele:

Ausgabe zuordnen

in der Vorlesung:

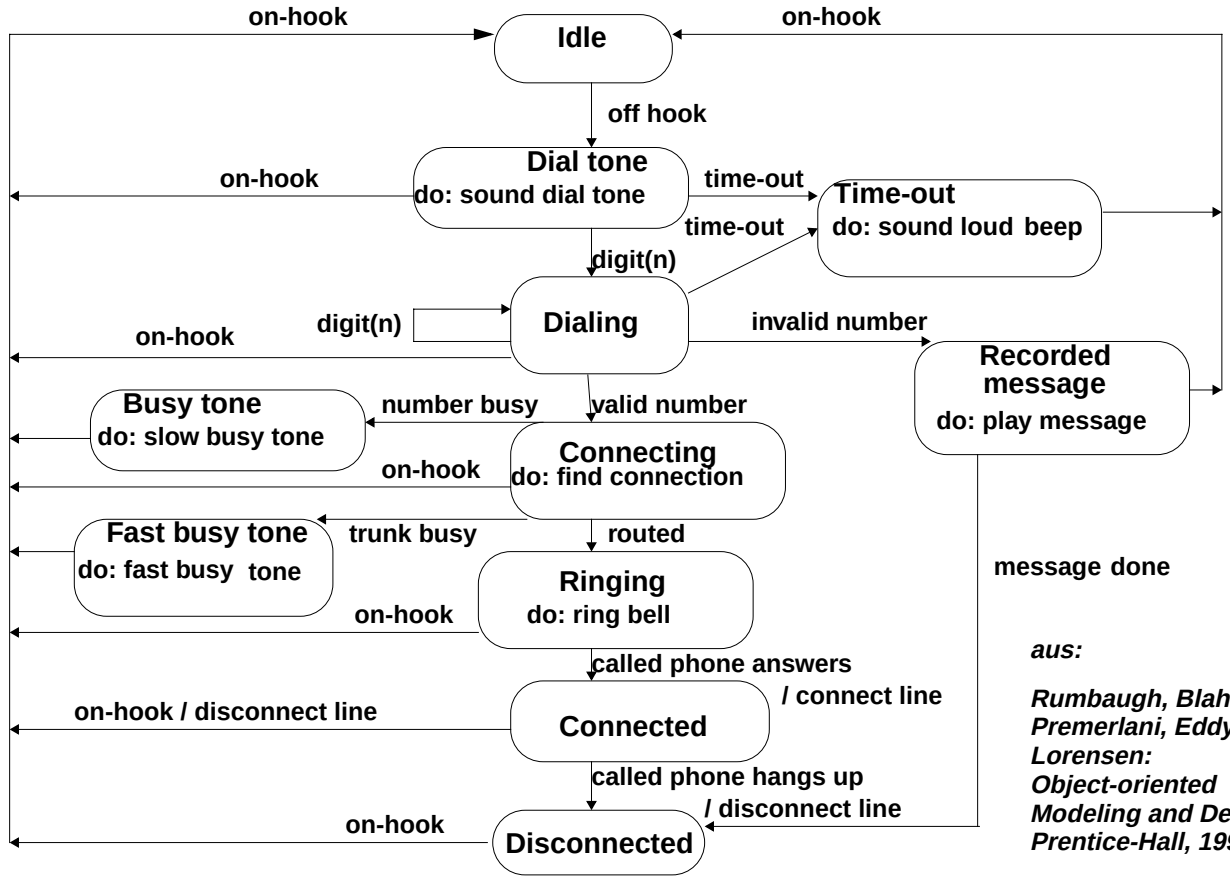
Erläuterungen dazu

- Mealy-Automat erläutern
- An einigen Positionen bleibt die Ausgabe leer.
- Moore-Automat erläutern
- Zusätzliche Zustände begründen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Endlicher Automat zur Telefonbedienung



aus:

Rumbaugh, Blaha, Premerlani, Eddy, Lorensen: Object-oriented Modeling and Design, Prentice-Hall, 1991

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 714

Ziele:

Praktisches Modellierungsbeispiel sehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Eingabe sind Ereignisse beim Telefonieren
- Ausgabe sind ausgelöste Aktionen
- Ausgabe ist sowohl einigen Zuständen (do:...) als auch einigen Übergängen (/ ...) zugeordnet.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1

Übungsaufgaben:

Modellieren Sie die Bedienung des Getränkeautomaten durch endliche Automaten. Modellieren Sie Das Betätigen der Tasten, die Geldeingabe, Geldrückgabe und Getränkeausgabe.

Endliche Automaten in UML: Modell einer Uhr

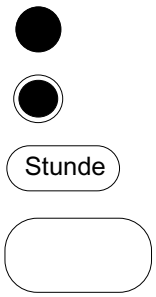
UML Diagrammtyp Statecharts:
Modellierung von Abläufen

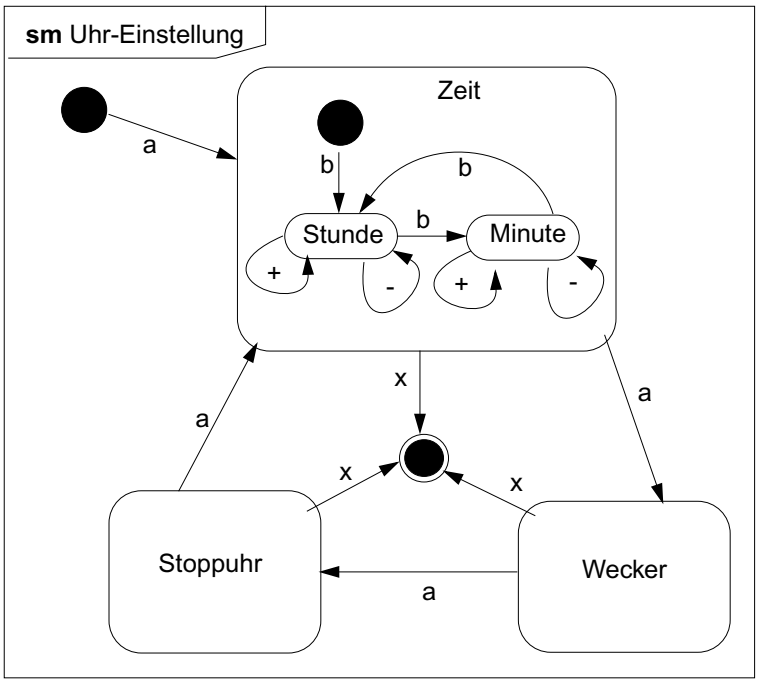
Bedienung einer Uhr
Einstellen von Zeit, Wecker, Stoppuhr

Konzeptuelle Grundlage:
Endliche Automaten

Zustände können **hierarchisch zu Teilautomaten verfeinert** werden.

Mehrere Teilautomaten können „quasi-gleichzeitig“ Übergänge ausführen - zur **Modellierung von Nebenläufigkeit**.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 714a

Ziele:

UML Statechart am Beispiel kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

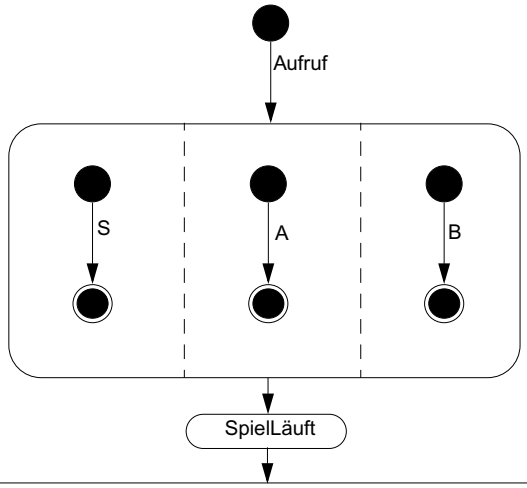
- Wiederholtes Betätigen der Taste "a" schaltet zwischen der Einstellung von Zeit, Wecker und Stoppuhr um.
- Taste "x" beendet das Einstellen.
- Der Teilautomat "Zeit" ist weiter verfeinert:
- Von jedem seiner 3 Zustände wird er mit "a" oder "x" verlassen.
- Jedes Statechart kann systematisch in einen endlichen Automaten mit gleichem Verhalten transformiert werden.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1.5

Modellierung von Nebenläufigkeit: Beginn eines Tennisspieles

UML Statechart

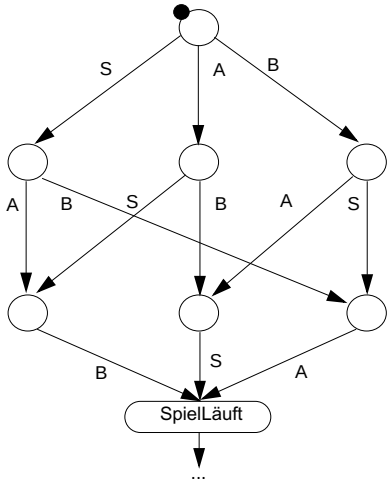


Mit dem „Aufruf“ des werden die 3 Teilautomaten des mittleren Zustandes „gleichzeitig“ aktiviert.

Sie führen jeweils einen Übergang aus (Ankunft von Schiedsrichter, Spieler A, Spieler B).

Wenn sie ihre Endzustände erreicht haben, wird der zusammengesetzte Zustand verlassen.

Det. endlicher Automat



Der gleichbedeutende **endliche Automat** modelliert **alle Reihenfolgen der Übergänge** S, A, B.

Das **Statechart abstrahiert** davon.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 714b

Ziele:

Modellierung von Nebenläufigkeit

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Es ist nicht relevant, in welcher Reihenfolge die Übergänge in den Teilautomaten des Statechart ausgeführt werden.
- Deshalb ist das Statechart übersichtlicher als der endliche Automat.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.1.5

7.2 Petri-Netze

Petri-Netz (auch Stellen-/Transitions-Netz):
Formaler Kalkül zur **Modellierung von Abläufen mit nebenläufigen Prozessen** und kausalen Beziehungen

Basiert auf **bipartiten gerichteten Graphen**:

- **Knoten** repräsentieren **Bedingungen**, Zustände bzw. **Aktivitäten**.
- **Kanten** verbinden **Aktivitäten** mit ihren **Vor- und Nachbedingungen**.
- **Knotenmarkierung** repräsentiert den veränderlichen **Zustand des Systems**.
- **graphische Notation**.

C. A. Petri hat sie 1962 eingeführt.
Es gibt zahlreiche Varianten und Verfeinerungen von Petri-Netzen. Hier nur die Grundform.

Anwendungen von Petri-Netzen zur Modellierung von

- realen oder abstrakten Automaten und Maschinen
- kommunizierenden Prozessen in der Realität oder in Rechnern
- Verhalten von Hardware-Komponenten
- Geschäftsabläufe
- Spielpläne

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 715

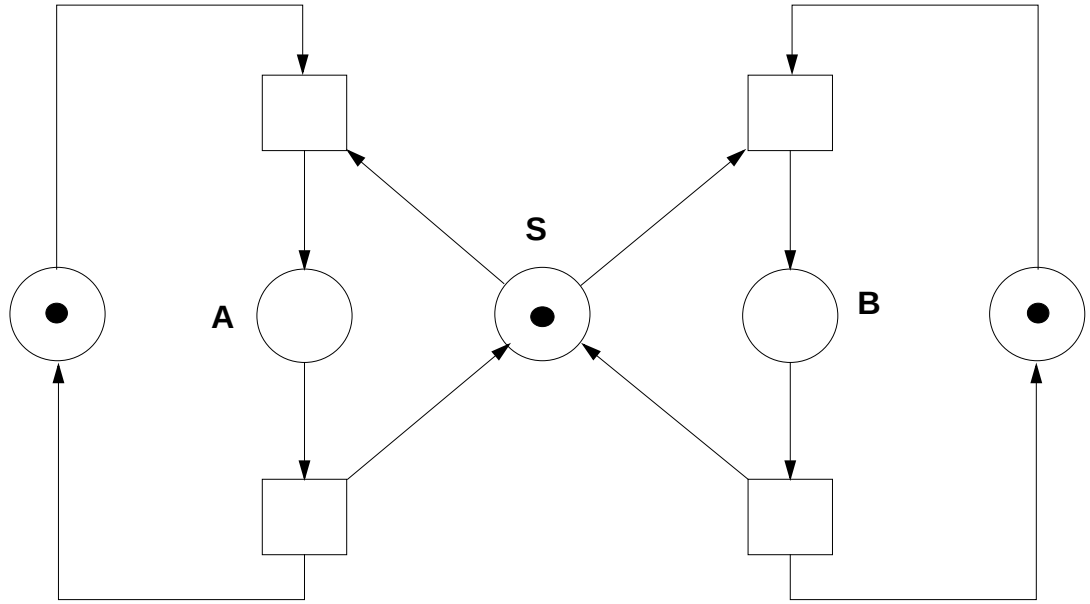
Ziele:
Einführung zu Petri-Netzen

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Einführendes Beispiel

Das Petri-Netz modelliert zwei **zyklisch ablaufende Prozesse**.
Die mittlere Stelle synchronisiert die beiden Prozesse,
so dass sie sich **nicht zugleich in den Zuständen A und B** befinden können.
Prinzip: **gegenseitiger Ausschluss** durch **Semaphor**



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 716

Ziele:

Eindruck von Petri-Netzen

in der Vorlesung:

informelle Erläuterungen zu

- parallelen Prozessen
- gegenseitigem Ausschluss
- Markierung und Schalten in Petri-Netzen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Definition von Petri-Netzen

Ein **Petri-Netz** ist ein Tripel P = (S, T, F) mit

S **Menge von Stellen**,
repräsentieren Bedingungen, Zustände; graphisch Kreise

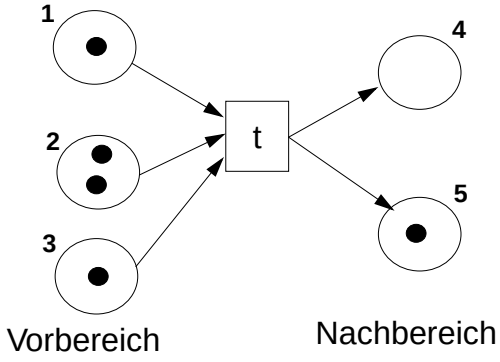
T **Menge von Transitionen** oder Übergänge,
repräsentieren Aktivitäten; graphisch Rechtecke

F **Relation** mit $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
repräsentieren kausale oder zeitliche Vor-, Nachbedingungen von Aktivitäten aus T

P bildet einen **bipartiten, gerichteten Graphen** mit den Knoten $S \cup T$ und den Kanten F.

Zu einer **Transition t** in einem Petri-Netz P sind folgende Stellenmengen definiert
Vorbereich (t) := { s | (s, t) ∈ F}
Nachbereich (t) := { s | (t, s) ∈ F}

Der **Zustand des Petri-Netzes** wird durch eine **Markierungsfunktion** angegeben, die jeder Stelle eine **Anzahl von Marken** zuordnet:
$M_P: S \rightarrow \mathbb{N}_0$
Sind die Stellen von 1 bis n nummeriert, so kann man M_P als Folge angeben, z. B. (1, 2, 1, 0, 1)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 717

Ziele:

Petri-Netz formal verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Begriffen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Verständnisfragen:

Welche Arten von Kanten kann es in einem Petri-Netz nicht geben?

Schaltregel für Petri-Netze

Das **Schalten einer Transition** t überführt eine Markierung M in eine Markierung M‘.

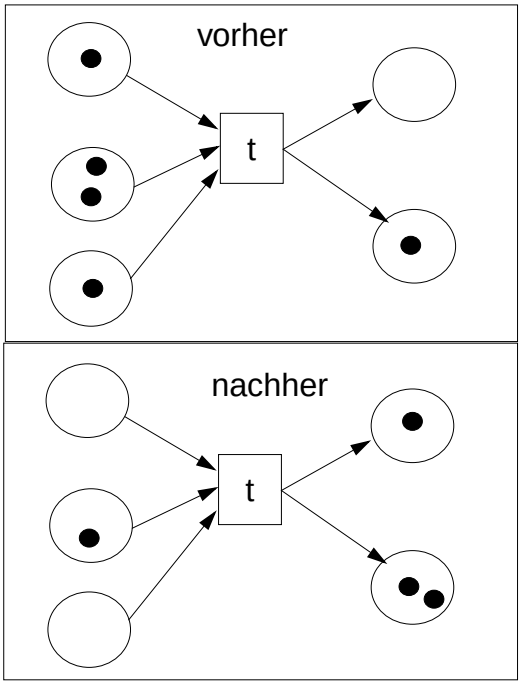
Eine **Transition t kann schalten**, wenn für alle Stellen s ∈ Vorbereich (t) gilt M(s) ≥ 1.

Wenn eine Transition t **schaltet,** gilt für die **Nachfolgemarkierung M‘**:

M‘(v) = M(v) - 1 für alle
v ∈ Vorbereich(t) \ Nachbereich(t)

M‘(n) = M(n) + 1 für alle
n ∈ Nachbereich(t) \ Vorbereich(t)

M‘(s) = M(s) sonst



Wenn in einem Schritt **mehrere Transitionen schalten können**, wird eine davon **nicht-deterministisch ausgewählt**.

In jedem Schritt schaltet genau eine Transition
- auch wenn das Petri-Netz parallele Abläufe modelliert!

Zwei Transitionen mit gemeinsamen Stellen im Vorbereich können (bei passender Markierung) im **Konflikt** stehen:
Jede kann schalten, aber nicht beide nacheinander.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 718

Ziele:

Schaltregel verstehen

in der Vorlesung:

- Schaltregel erläutern
- nicht-deterministische Auswahl zeigen,
- Konflikt zwischen mehreren Transitionen, die Schalten können zeigen.

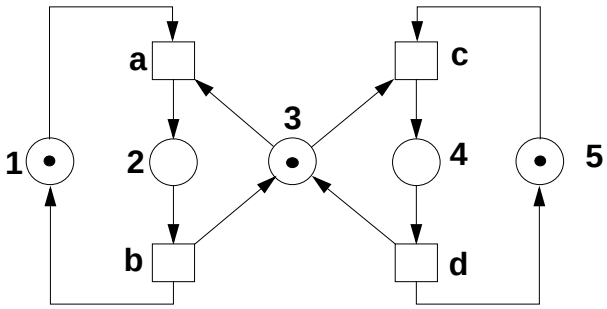
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Markierungen

Zu jedem Petri-Netz wird eine
Anfangsmarkierung M_0 angeben.

z. B. $\mathbf{M_0}$ = (1, 0, 1, 0, 1)

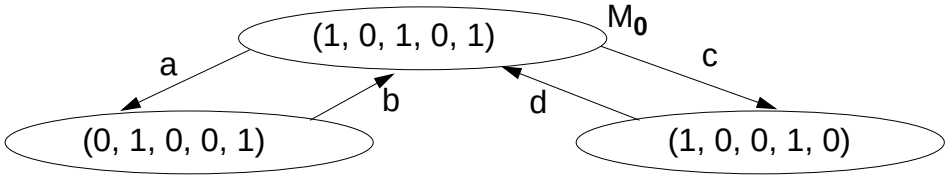


Wir sagen, eine **Markierung M_2 ist von einer Markierung M_1 aus erreichbar**, wenn es ausgehend von M_1 eine Folge von Transitionen gibt, die nacheinander schalten und M_1 in M_2 überführen können.

Die Markierungen eines Petri-Netzes kann man als gerichteten **Markierungsgraphen** darstellen:

- Knoten: erreichbare Markierung
- Kante x->y: Die Markierung x kann durch Schalten einer Transition in y übergehen.

Markierungsgraph



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 719

Ziele:

Darstellung von Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Markierung als

- Funktion,
- Tupel,
- Knoten im Markierungsgraph;
- Zusammenhang zu endlichen Automaten.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Schaltfolgen

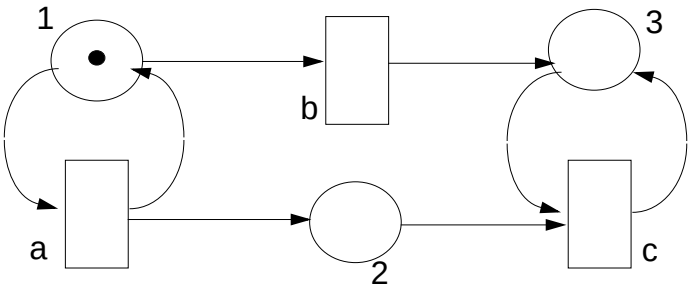
Schaltfolgen kann man angeben als

- Folge von Markierungen
- Folge der geschalteten Transitionen

Beispiel für eine **Schaltfolge** zum Petri-Netz auf Mod-7.19:

(1, 0, 1, 0, 1)	a
(0, 1, 0, 0, 1)	b
(1, 0, 1, 0, 1)	c
(1, 0, 0, 1, 0)	d
(1, 0, 1, 0, 1)	

Schaltfolgen können als Wörter einer Sprache aufgefasst werden.



alle Schaltfolgen ohne Nachfolgemarkierung haben die Form:

$a^n\ b\ c^n$

Petri-Netze können unbegrenzt zählen: Anzahl der Marken auf einer Stelle.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 720

Ziele:

Mit Schaltfolgen modellieren

in der Vorlesung:

- Notation von Schaltfolgen,
- Zusammenhang zu Sprachen von endlichen Automaten.

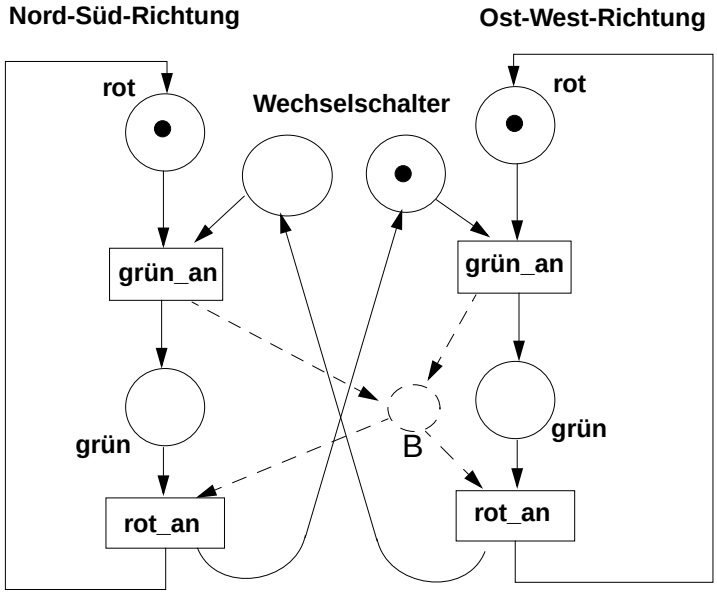
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Modellierung alternierender zyklischer Prozesse

Beispiel: Einfache Modellierung einer Ampelkreuzung:

- 2 sich zyklisch wiederholende Prozesse
- Die beiden Stellen „Wechselschalter“ koppeln die Prozesse, sodass sie alternierend fortschreiten.
- Alle Stellen repräsentieren Bedingungen: 1 oder 0 Marken
- „Beobachtungsstelle“ B modelliert, wieviele Richtungen „grün“ haben



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 721

Ziele:

Modellieren von Bedingungen lernen

in der Vorlesung:

Erläuterung

- der zyklischen Prozesse,
- der Bedingungen,
- der Rolle der Beobachtungsstelle.

nachlesen:

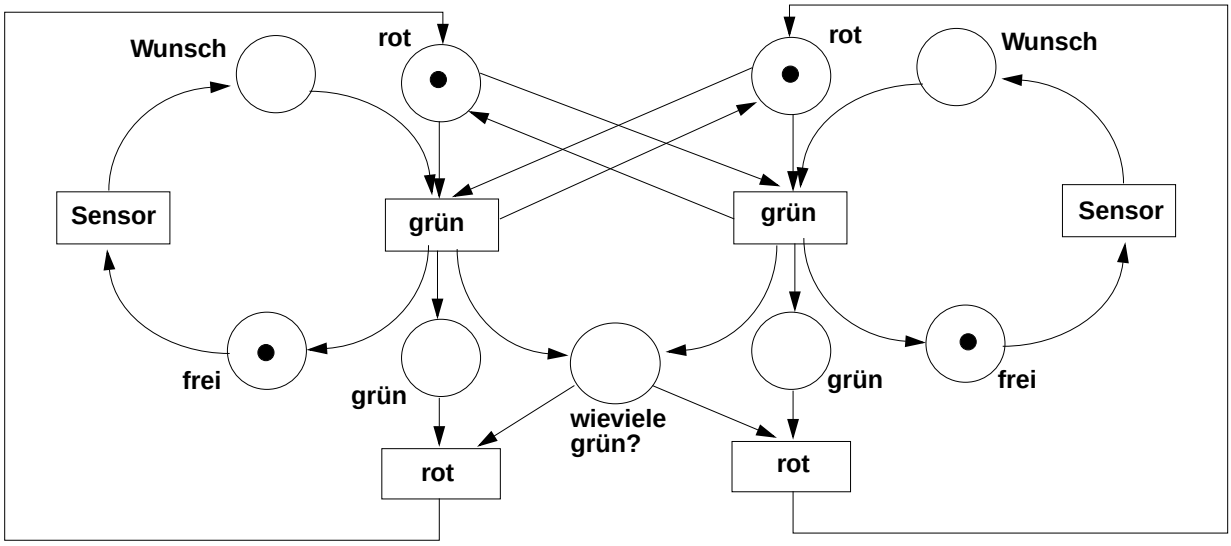
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Beispiel für ein binäres Netz

Ein Petri-Netz heißt **binär (sicher)**, wenn für alle aus M_0 erreichbaren Markierungen M und für alle Stellen s gilt $M(s) \leq 1$.

Petri-Netze, deren **Stellen Bedingungen repräsentieren** müssen binär sein.

Beispiel: Modellierung einer Sensor-gesteuerten Ampelkreuzung:



aus: B. Baumgarten: Petri-Netze, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 1990

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 722

Ziele:

Stellen als Bedingungen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu dem Beispiel,
- Vor- und Nachbedingungen diskutieren,
- Eigenschaften diese Modells diskutieren

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Lebendige Petri-Netze

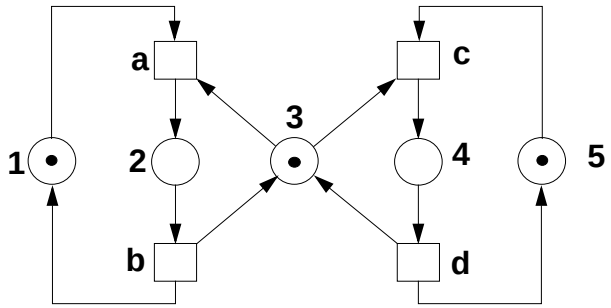
Petri-Netze modellieren häufig **Systeme, die nicht anhalten** sollen.

Ein Petri-Netz heißt **schwach lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung eine Nachfolgemarkierung gibt.

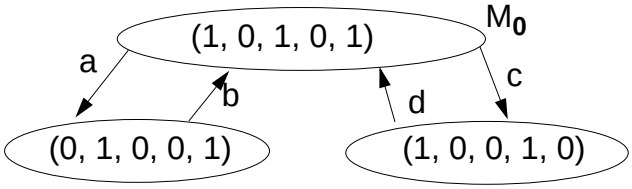
Eine **Transition t heißt lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung M' eine Markierung M" gibt, die von M' erreichbar ist, und in der t schalten kann.

Ein **Petri-Netz heißt lebendig**, wenn alle seine Transitionen lebendig sind.

Beispiel für ein **lebendiges Petri-Netz** (Mod-7.19):



Markierungsgraph



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 723

Ziele:

Begriffe zur Lebendigkeit von Netzen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- nicht-terminierenden Systemen,
- Lebendigkeitsbegriffen,

am Beispiel von Mod-7.19

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Verklemmungen

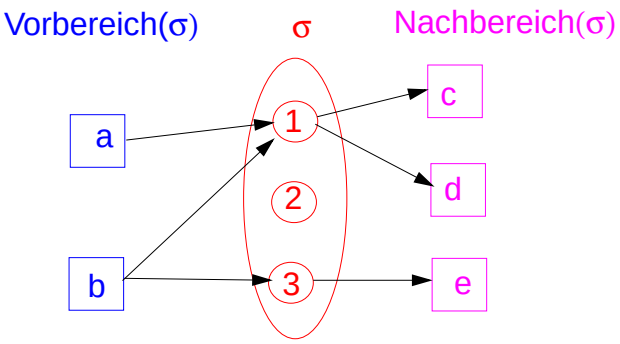
Verklemmung: Ein System kann unerwünscht anhalten,
weil das **Schalten einiger Transitionen zyklisch voneinander abhängt**.

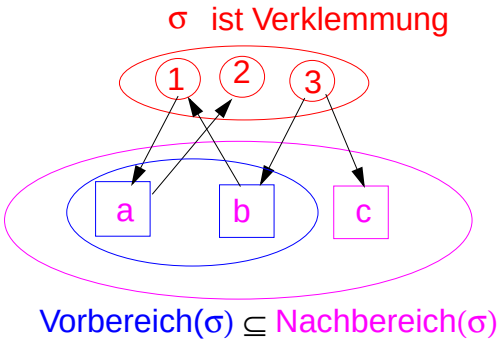
Sei: $\sigma \subseteq S$ eine Teilmenge der Stellen eines Petri-Netzes und

Vorbereich (σ) := $\{t \mid \exists\, s \in \sigma : (t, s) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die auf Stellen in σ wirken
Nachbereich (σ) := $\{t \mid \exists\, s \in \sigma : (s, t) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die Stellen in σ als Vorbedingung haben

Dann ist σ eine **Verklemmung, wenn Vorbereich** (σ) $\subseteq$ **Nachbereich** (σ).

Wenn **für alle** $s \in \sigma$ **gilt M (s) = 0**, dann kann es **keine Marken auf Stellen in** σ in einer Nachfolgemarkierung von M geben.





Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 723a

Ziele:

Begriff Verklemmung verstehen

in der Vorlesung:

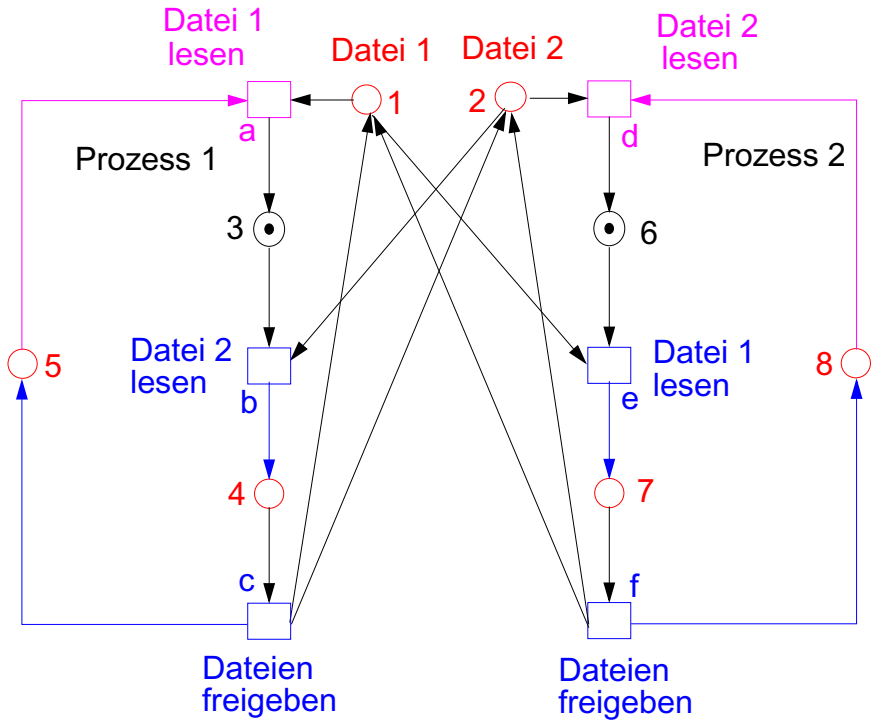
Erläuterungen zu

- Verklemmungen am Beispiel von Mod-7.24

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Verklemmung beim Lesen von Dateien



s = {1, 2, 4, 5, 7, 8}

Vorbereich (s)
= {b, c, e, f}

Nachbereich (s)
= {a, b, c, d, e, f}

M (s) = 0

Anfangsmarkierung:
(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 724

Ziele:

Beispiel für eine Verklemmung

in der Vorlesung:

Erläuterung:

- Jeder der Prozesse fordert nacheinander zwei Dateien an und gibt sie dann beide wieder frei.
- Die Verklemmung tritt ein, wenn jeder Prozess eine Datei belegt und auf die andere wartet.
- Sigma charakterisiert diese Situation.
- Es gibt verschiedene Techniken, die Verklemmung zu vermeiden, z. B.
- Bei einem Prozess die Reihenfolge der Dateien vertauschen.
- Beide Dateien zugleich anfordern.

nachlesen:

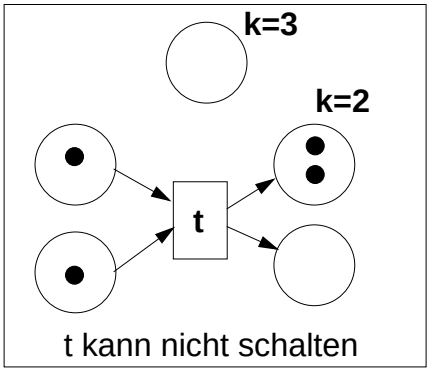
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Kapazitäten und Gewichte

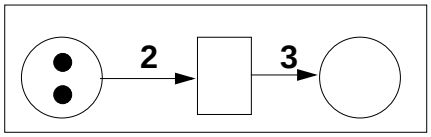
Man kann **Stellen eine begrenzte Kapazität** von $k \in \mathbb{N}$ Marken zuordnen.

Die Bedingung, dass eine **Transition t schalten kann**, wird erweitert um:

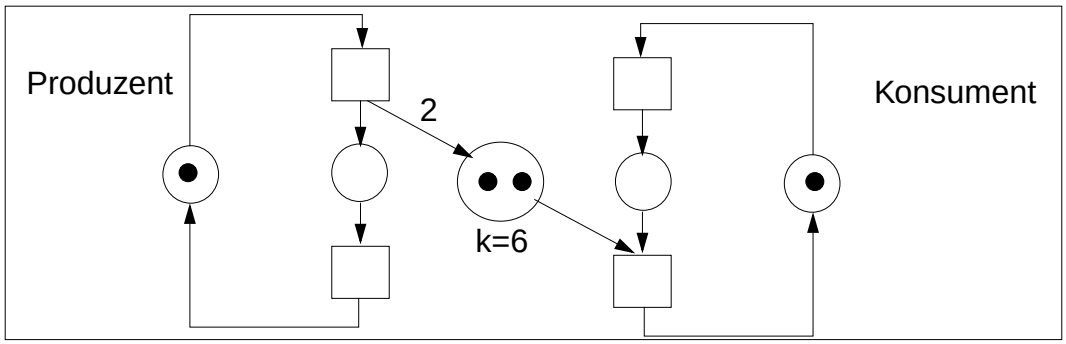
Die **Kapazität keiner der Stellen im Nachbereich von t darf überschritten** werden.



Kanten kann ein **Gewicht** $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden: sie bewegen **beim Schalten n Marken**.



Beispiel: **Beschränkter Puffer**



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 725

Ziele:

Konzepte verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterung der beiden Konzepte am Beispiel.

- Schaltregel wird ergänzt.
- Produzent liefert immer 2 Einheiten zugleich (Kantengewicht 2).
- Produzent kann nur liefern (schalten), wenn die Pufferstelle noch freie Kapazität.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

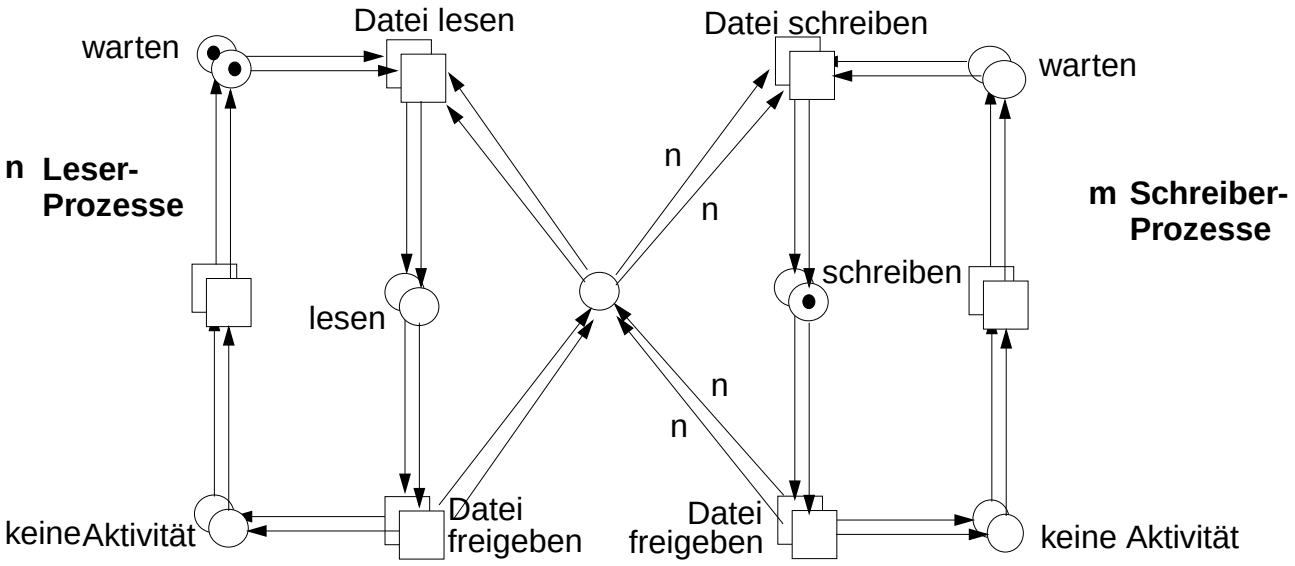
Beispiel: Leser-Schreiber-System

n Leser-Prozesse und **m Schreiber-Prozesse** operieren **auf derselben Datei**.

Mehrere **Leser können zugleich lesen**.

Ein **Schreiber** darf nur dann schreiben, wenn **kein anderer Leser oder Schreiber aktiv** ist.

Modellierung: ein **Schreiber entzieht der Synchronisationsstelle alle n Marken**.



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 726

Ziele:

Beispiel für Kapazitäten und Gewichte

in der Vorlesung:

- Erläuterung des Leser-Schreiber-Systems.
- Allerdings können wechselnde Leser die Schreiber auf Dauer blockieren. Das Petri-Netz ist nicht fair.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 7.2

Übungsaufgaben:

Modellieren Sie die Bedienung des Getränkeautomaten durch Petri-Netze. Modellieren Sie Das Betätigen der Tasten, die Geldeingabe, Geldrückgabe und Getränkeausgabe.

8 Fallstudien

Jeweils **ein Gegenstandsbereich** steht im Vordergrund

Seine Strukturen, Eigenschaften, Zusammenhänge werden mit **verschiedenen Kalkülen** modelliert.

Verschiedene Kalküle werden eingesetzt, um

- **unterschiedliche Aspekte** zu beschreiben
- Beschreibungen derselben Aspekte zu **vergleichen**.

Fallstudie 1:	Autowerkstatt
Fallstudie 2:	Monopoly - Spiel
Fallstudie 3:	Getränkeautomat (siehe Übungen)

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 801

Ziele:

Kalküle im Zusammenhang verwenden

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu,
- Fallstudien 1, 2 folgen hier; Fallstudie 3 wurde in Übungsaufgaben behandelt.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

Fallstudie 1: Autowerkstatt

Wir modellieren die **Auftragsabwicklung in einer Autowerkstatt**.

Ziel: Datenbank entwerfen, Abläufe analysieren und verbessern

Teilaufgaben:

1. **Informationen und Zusammenhänge**
2. **Bedingungen und Regeln**
3. **Abläufe bei der Auftragsabwicklung**

Kurzbeschreibung der Informationsstruktur:

1. **Kunde**: hat einen Namen, besitzt Kraftfahrzeuge, erteilt Aufträge
2. **Auftrag**: hat Eingangsdatum, betrifft ein Kraftfahrzeug,
   wird von Mechanikern bearbeitet,
   benötigt Ersatzteile bestimmter Arten und Mengen
3. **Kraftfahrzeug**: hat Fahrgestellnummer und Baujahr,
   ist entweder ein PKW oder ein Motorrad;
   zu PKWs interessiert ihre Farbe, zu Motorrädern der Tuningsatz
4. **Typ**: Kraftfahrzeug hat einen Typ,
   Mechaniker ist für einige Typen ausgebildet,
   Ersatzteil ist für bestimmte Typen verwendbar

Ziele:

Gegenstandsbereich kennenlernen

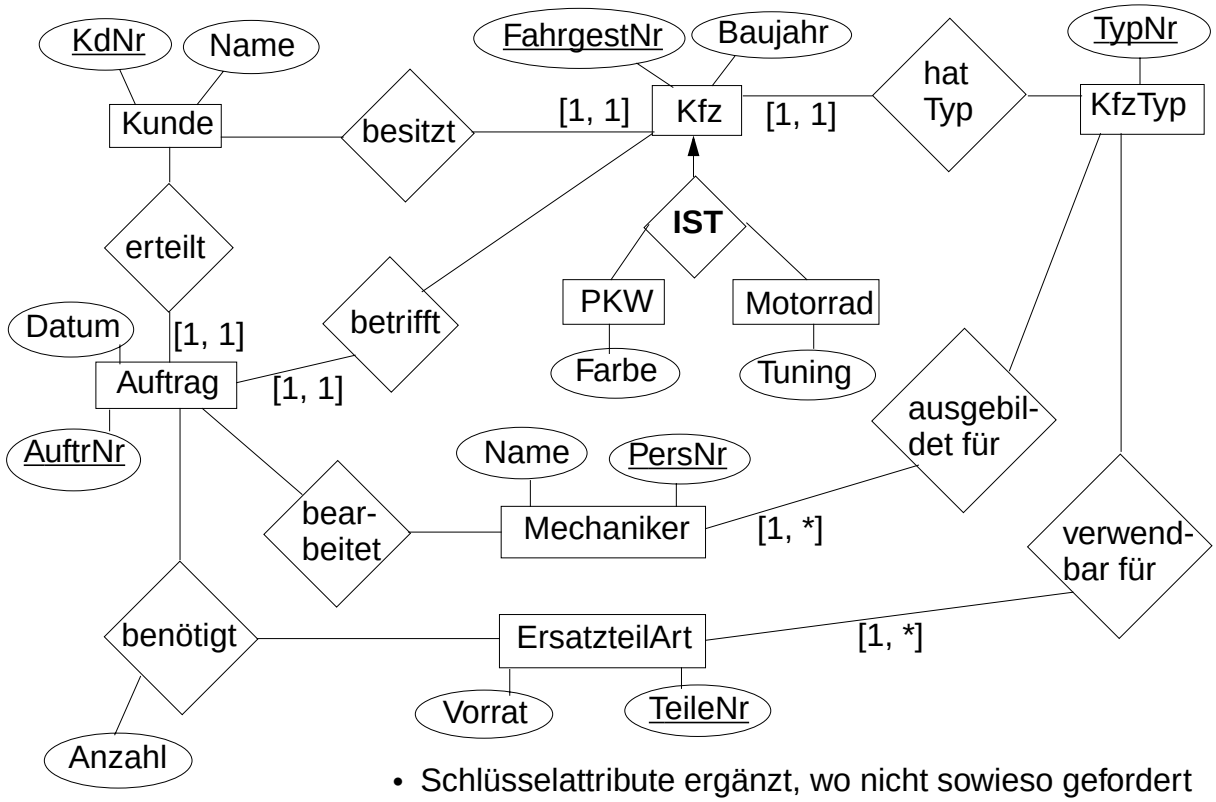
in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

8.1.a Informationsstruktur als ER-Modell



Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 803

Ziele:

ER Methode anwenden

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu (mit Mod-8.2):

- Beginnen mit ER Modellierung.
- Macht Zusammenhänge deutlicher als Modellierung mit Wertebereichen.
- Entity-Typen sind aus der informellen Beschreibung gut erkennbar.
- Alle an Relationen beteiligten Objektarten müssen durch Entity-Typen modelliert werden, so auch Ersatzteile.
- Offenbar geht es hier nicht um individuelle Ersatzteile sondern um Ersatzteilarten die jeweils in bestimmter Anzahl vorhanden sind.
- Entwurf prüfen durch Angabe von Ausprägungen.

Kardinalitäten:

- Typzugehörigkeit immer [1, 1];
- Auftrag für genau ein Kfz (plausibel);
- Auftrag von genau einem Kunden (plausibel);
- eindeutiger Kfz-Besitzer (restriktiv);
- Mechaniker für mindestens einen Kfz-Typ (restriktiv);
- Ersatzteilart für mindestens einen Kfz-Typ (restriktiv);
- weitere Restriktionen sind nicht nötig.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

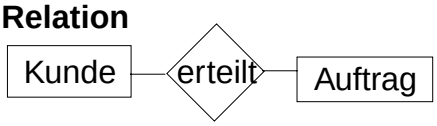
Vergleich ER-Modell und Wertebereiche

Attribut — Vorrat — Vorrat := $\mathbb{N}_0$ — **Wertemenge**

Schlüsselattribut — KdNr — KdNr := $\mathbb{N}_0$ — **Indexmenge**

Entity-Typ — Kunde, Name — Kunde := KdNr $\times$ Name — **kartesisches Produkt** ohne Identität der Entities

Relation



erteilt := Pow (Kunde $\times$ Auftrag) — **Relation**

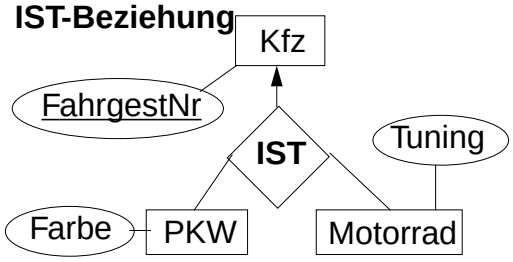
Kardinalität [1, 3]

Prädikatenlogik:
$\forall$ a $\in$ Auftrag: $1 \leq |\{ (x,y) \mid (x,y) \in \text{erteilt} \wedge y=a\}| \leq 3$

[1, 1]

erteilt: Auftrag -> Kunde — **Funktion** (hier: total)

IST-Beziehung



kartesisches Produkt und disjunkte Vereinigung:

Kfz := FahrgestNr $\times$ KfzVarianten

KfzArten := { istPKW, istMotorrad }

KfzVarianten := { (istPKW, p) | p $\in$ Farbe } $\cup$
{ (istMotorrad, m) | m $\in$ Tuning}

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 804

Ziele:

Vergleichen und verstehen

in der Vorlesung:

Muster zur Zuordnung von Konstrukten des ER Modells und Wertebereichen:

- Die Identität der Objekte in Entity-Typen bleibt nur über die Schlüsselattribute erhalten.
- Nur funktionale Kardinalitäten kann man direkt als Funktions-Wertebereich ausdrücken; sonst werden Prädikate benötigt.
- IST-Hierarchien sollte man schematisch wie hier in disjunkte Vereinigungen umsetzen.

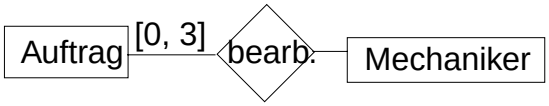
nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

8.1.b Bedingungen

Ein Auftrag soll von höchstens 3 Mechanikern bearbeitet werden:

ER Kardinalität:



Prädikatenlogik: $\forall a \in \text{Auftrag}: 0 \leq |\{ (x,y) \mid (x,y) \in \text{bearb.} \wedge x=a\}| \leq 3$

Ein Auftrag soll nur dann angenommen werden, wenn für den betreffenden KfzTyp auch Mechaniker ausgebildet sind.

Prädikatenlogik: $\forall a \in \text{Auftrag}: \forall k \in \text{Kfz}: \forall t \in \text{KfzTyp}:$
$((a, k) \in \text{betrifft} \wedge (k, t) \in \text{hatTyp}) \rightarrow$
$\exists m \in \text{Mechaniker}: (m, t) \in \text{ausgebildet}$

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 805

Ziele:

Prädikate formulieren

in der Vorlesung:

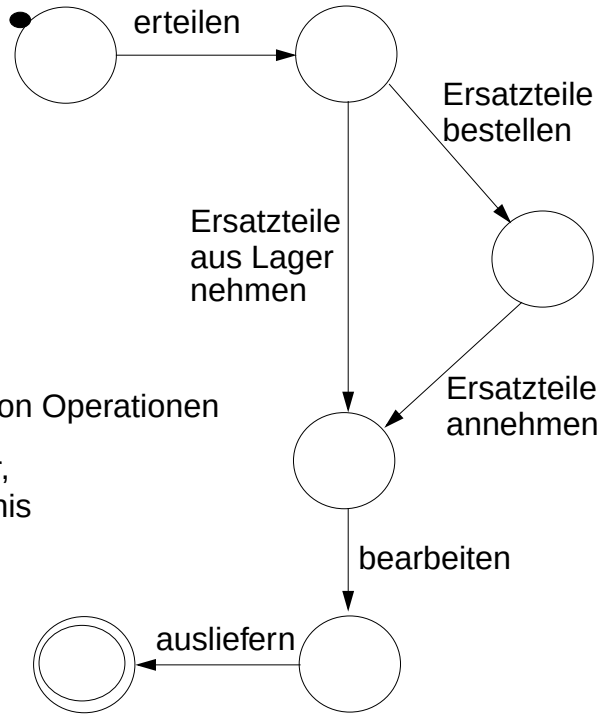
- Einfache Bedingungen können durch ER-Kardinalitäten spezifiziert werden.
- Mit PL-Formeln kann man beliebig komplexe Bedingungen formulieren (siehe auch Mod-8.12):
- Zusammenhänge über mehrere Relationen hinweg,
- Bedingungen über Attributwerte.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

8.1.c Ablauf der Auftragsbearbeitung (DEA)

- Auftrag wird **erteilt**,
- Verfügbarkeit der Ersatzteile **geprüft**,
- ggf. **bestellt**,
- von einem Mechaniker **bearbeitet**,
- Kraftfahrzeug wird dem Kunden **ausgeliefert**.



Deterministischer, endlicher Automat
beschreibt streng **sequentielle Abfolge** von Operationen

Auch als **Abhängigkeitsgraph** interpretierbar,
hier: Kante ist Operation, Knoten ist Ereignis

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 806

Ziele:

DEA Entwurf für Ereignisfolgen

in der Vorlesung:

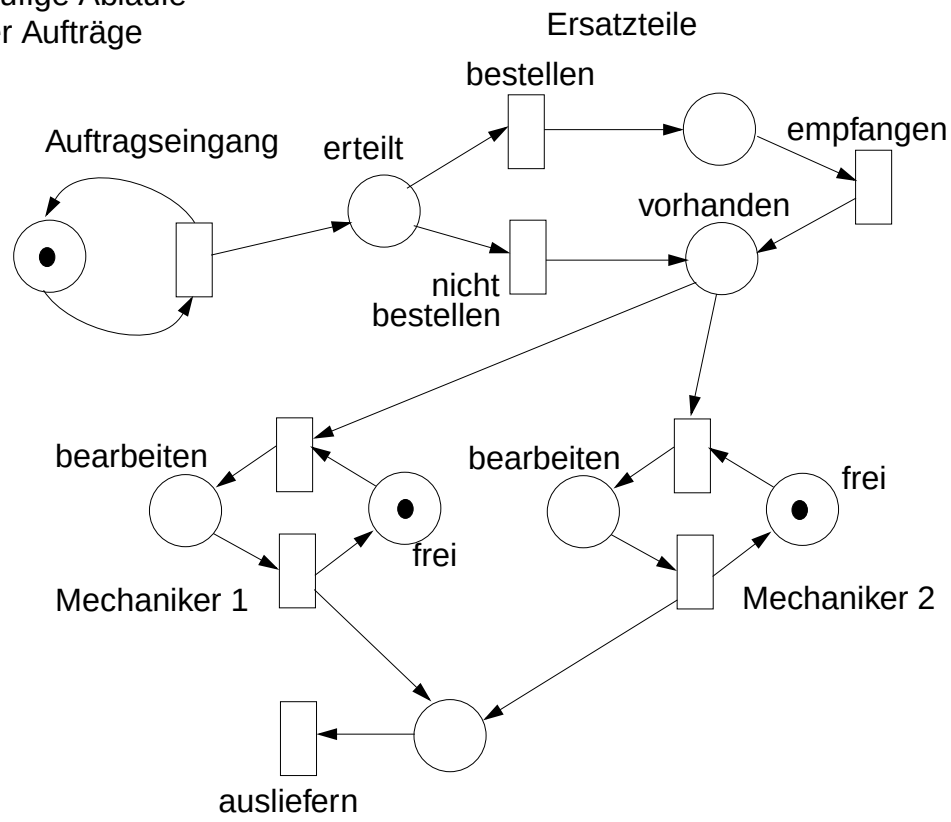
- Erläuterungen dazu und Vergleich mit Petri-Netz-Modell
- Hier nur Bearbeitung aus der Sicht eines Auftrages modelliert.
- Verzahnte Aktionsfolgen (mehrere Aufträge, mehrere Bearbeiter) nicht modellierbar.
- Keine Parameter an den Aktionen (z. B. Anzahl der Ersatzteile).
- Als Abhängigkeitsgraph interpretieren.
- Duales Modell dazu angeben (Knoten = Operation, Kante = Vorbedingung).

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

1.c Ablauf der Auftragsbearbeitung (Petri-Netz)

Petri-Netz
modelliert nebenläufige Abläufe
Durchlauf mehrerer Aufträge



Mechaniker konkurrieren um Aufträge:

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 807

Ziele:

Modellierung mit Petri-Netzen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu typischen Netz-Komponenten:

- Erzeugung von Marken (Aufträgen),
- Markensenke (nimmt Aufträge aus dem System),
- nicht-deterministische Verzweigung (Ersatzteile),
- konkurrierende Bearbeitung (durch Mechaniker).

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.1

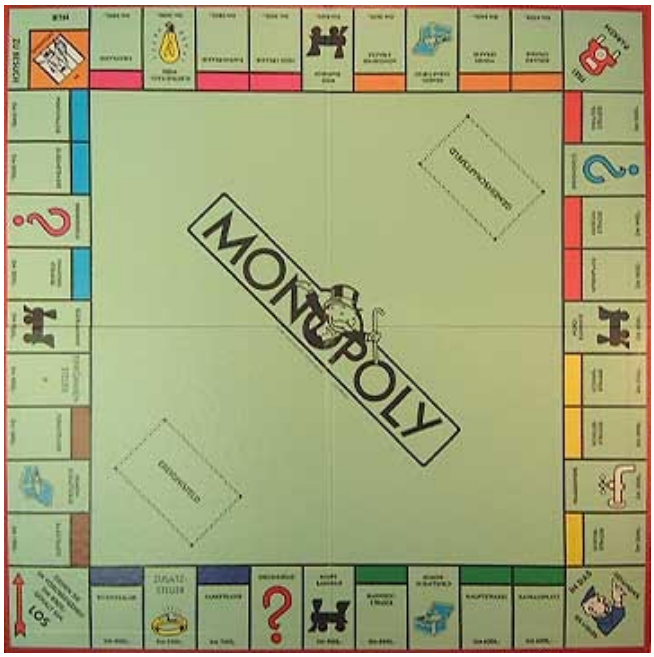
Fallstudie 2: Monopoly-Spiel

Wir modellieren Struktur und Ablauf des Monopoly-Spiels.

Ziel: Spielregeln präzisieren und formalisieren

Teilaufgaben:

1. **Informationen und Zusammenhänge**
2. **Bedingungen und Regeln**
3. **Spielabläufe**



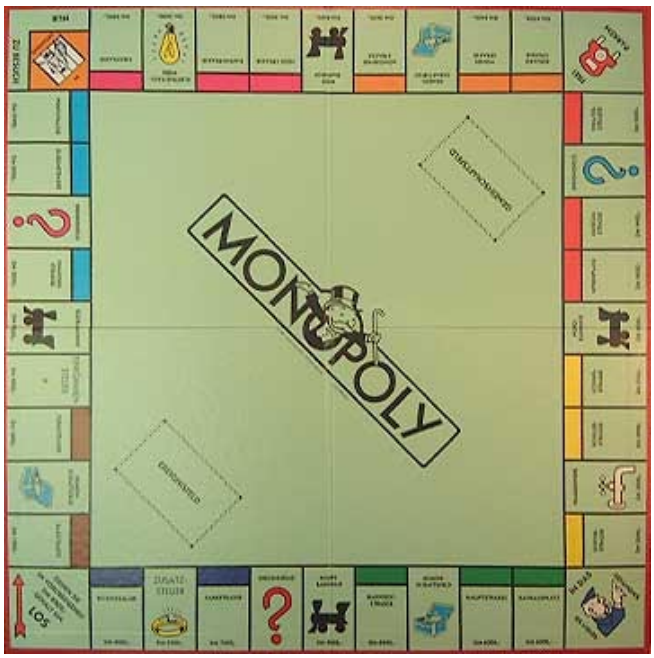
Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 808

Ziele:
Spiel mit komplexen Strukturen und Regeln

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu

nachlesen:
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

Kurzbeschreibung der Informationsstruktur



1. **Spieler**:
   hat einen Namen, steht auf einem Spielfeld, hat Vermögen, besitzt Immobilien
2. **Feld**:
   hat Nummer und Namen, ist entweder ein Aktionsfeld oder eine Immobilie
3. **Immobilie:**
   hat einen Preis und kostet Miete, ist entweder eine Straße oder ein Infrastrukturobjekt
4. **Straße**:
   hat Preise und Anzahl für Häuser und Hotels sowie Funktion zur Berechnung der Miete
5. **Infrastrukturobjekt**:
   hat Konzerngröße und eine Funktion zur Berechnung der Miete
6. **Aktionsfeld**:
   fordert auf zum Bezahlen oder Kassieren eines Betrages oder zum Setzen auf ein Feld
7. **Straßengruppe**:
   2 oder 3 Straßen werden zu einer Gruppe mit gleicher Farbe zusammengefasst

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 809

Ziele:

Gegenstandsbereich kennenlernen

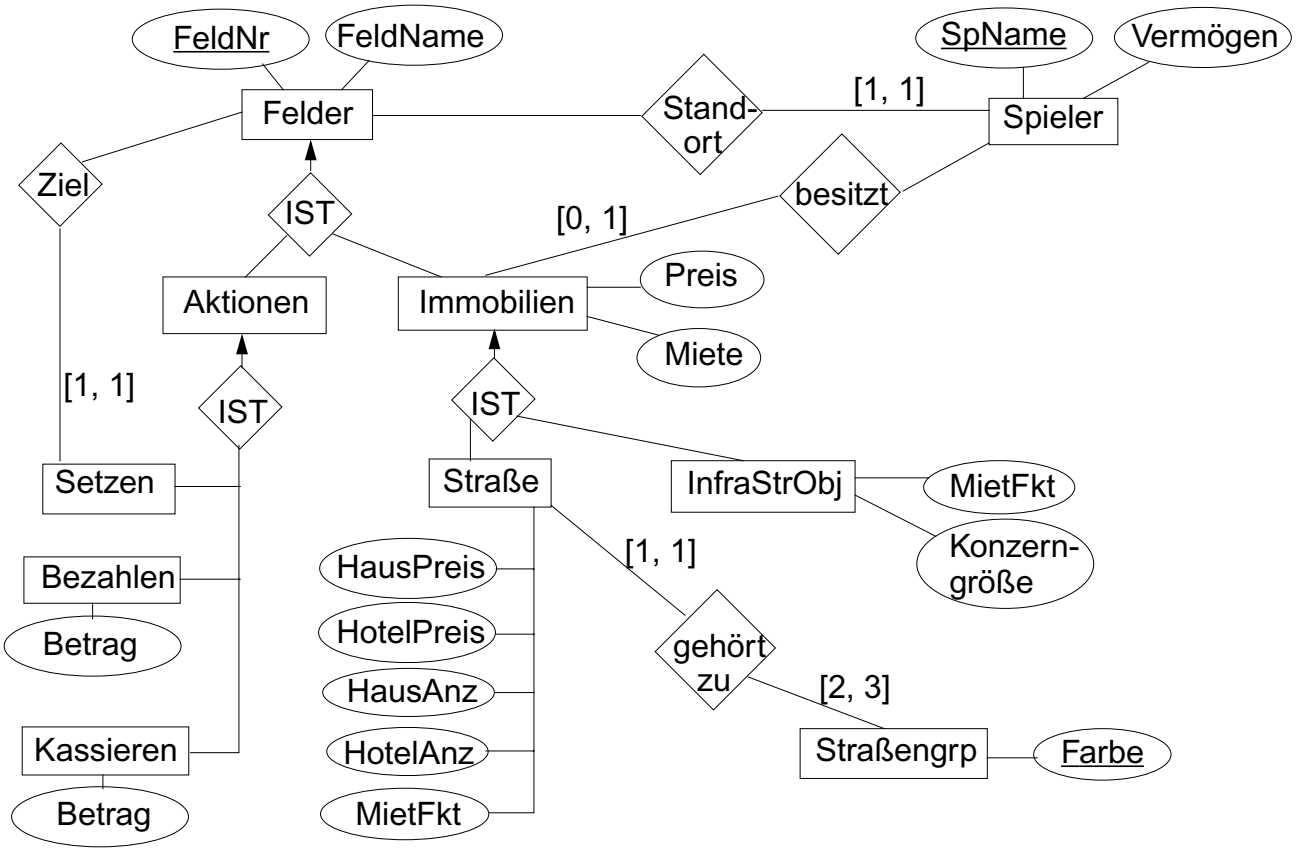
in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

8.2.a Informationsstruktur als ER-Modell



Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 810

Ziele:

ER-Methode anwenden

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- Entity-Typen vorgegeben,
- alle in Relationen beteiligten Mengen müssen durch einen Entity-Typ modelliert werden;
- 2-stufige IST-Hierarchie;
- Schlüsselattribut nur zur Hierarchiewurzel;
- Kardinalitäten sind hier plausibel;
- Entwurf prüfen durch Angabe von konkreten Ausprägungen.
- Miete und Mietfunktion mit ihren Parametern ist redundant;
- Relation gehörtZu eingeführt, damit die Anzahl von Gruppen ([2, 3]) eingeschränkt werden kann; wäre nicht möglich, wenn Farbe einfach ein Attribut von Straße wäre.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

Einige Wertebereiche zur Informationsstruktur

FeldNr	:= { 1, 2, ..., 40 }
FeldArten	:= { istAktion, istImmobilie }
Felder	:= FeldNr × FeldName × FeldVarianten
FeldVarianten	:= { (istAktion, a) | a ∈ Aktionen} ∪ { (istImmobilie, i) | i ∈ Immobilien }
AktionsArten	:= { istSetzen, istBezahlen, istKassieren }
Aktionen	:= { (istSetzen) } ∪ { (istBezahlen, b) | b ∈ Betrag } ∪ { (istKassieren, b) | b ∈ Betrag }
Betrag	:= $\mathbb{N}_0$
ImmobilienArten	:= { istStraße, istInfraStrObj }
Immobilien	:= Preis × Miete × ImmobilienVarianten
ImmobilienVarianten	:= { (istStraße, s) | s ∈ Straße } ∪ { (istInfraStrObj, i) | i ∈ InfrastrObj }
Straße	:= HausPreis × HotelPreis × HausAnzahl × HotelAnzahl × MietFkt
besitzt	:= FeldNr –> SpName

Beispiele für Felder:

(1, Los, (istAktion, (istKassieren, 4000))) ∈ Felder

(2, BadStraße, (istImmobilie, 1200, 40, (istStraße, 1000, 1000, 0, 0, MFkt2))) ∈ Felder

(6, Südbahnhof, (istImmobilie, 4000, 1000, (istInfraStrObj, 2, MFktBhf))) ∈ Felder

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 811

Ziele:

Wertebereiche systematisch entwickeln

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

- Bei komplexen Zusammenhängen wie hier ist es hilfreich, vorher ein ER-Modell zu erstellen, dann die Schemata aus Mod-8.4 anwenden;
- IST-Hierarchie schematisch modellieren;
- Entwurf prüfen durch Angabe von Werten aus den Wertebereichen.
- Relationen und Funktionen über Indexmengen (Schlüsselattribute) reichen aus und sind übersichtlicher als solche über die ganzen Tupelbereiche der beteiligten Objekte.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

8.2.b Bedingungen

Die **Miete einer Straße steigt** je intensiver sie **bebaut** ist;
die **Miete eines Infrastrukturobjektes steigt**
je mehr **gleichartige Objekte** ein Spieler besitzt.

$\forall$ x $\in$ Immobilien: $\forall$ p $\forall$ m $\forall$ hap $\forall$ hop $\forall$ haanz $\forall$ hoanz $\forall$ n $\forall$ g

[x = (p, m, (istStraße, hap, hop, haanz, hoanz, f)) $\rightarrow$ m = f (haanz, hoanz)] $\wedge$

[x = (p, m, (istInfraStrObj, n, g)) $\rightarrow$ m = g (n)]

Eine Straße darf nur dann **bebaut** werden,
wenn der Besitzer **alle Straßen dieser Gruppe** besitzt.

$\forall$ x $\in$ Felder: $\forall$ nr $\forall$ name $\forall$ p $\forall$ m $\forall$ hap $\forall$ hop $\forall$ haanz $\forall$ hoanz $\forall$ h

x = (nr, name, (istImmobilie, p, m, (istStraße, hap, hop, haanz, hoanz, h))) $\rightarrow$

(haanz + hoanz > 0 $\wedge$ $\exists$ f $\in$ Farbe: (x, f) $\in$ gehörtZu $\wedge$ $\exists$ s $\in$ Spieler: (s, x) $\in$ besitzt

$\rightarrow$ $\forall$ g $\in$ Felder: (g, f) $\in$ gehörtZu $\rightarrow$ (s, g) $\in$ besitzt

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 812

Ziele:

PL-Formeln entwerfen

in der Vorlesung:

PL-Formeln werden benötigt, um

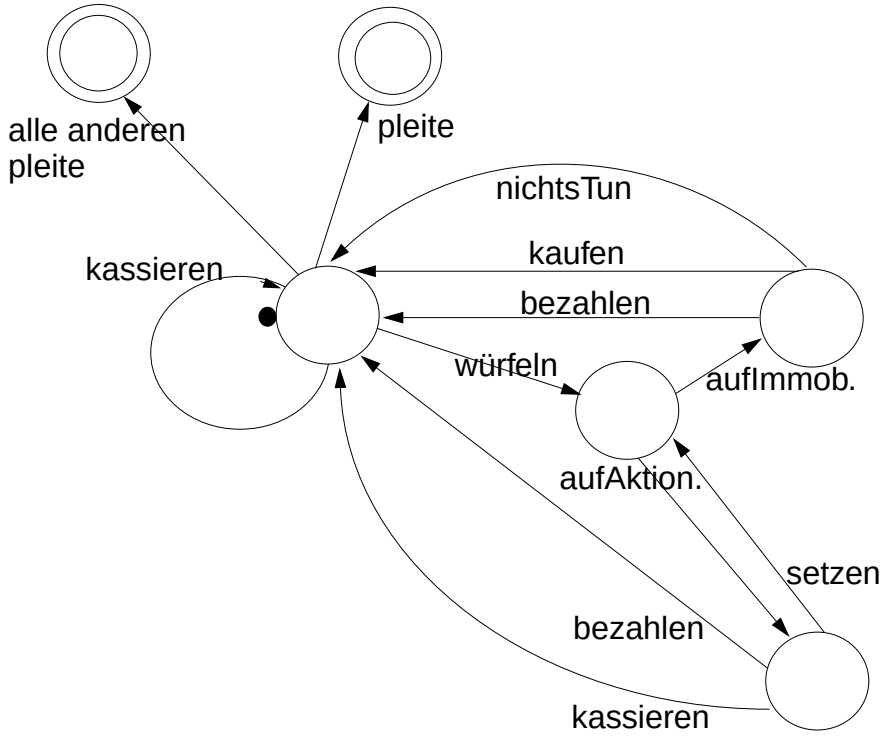
- Bedingungen über Attributwerte,
- Zusammenhänge über mehrere Relationen hinweg
- Exakte PL-Notation: Alle Werte der Tupel müssen durch Allquantoren gebunden sein - auch die für die Formel irrelevanten. (Wird in informeller Notation meist weggelassen.)

zu spezifizieren.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

2.c Aktionsfolgen eines Spielers (DEA)



Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 813

Ziele:

Aktionsfolgen mit DEA modellieren

in der Vorlesung:

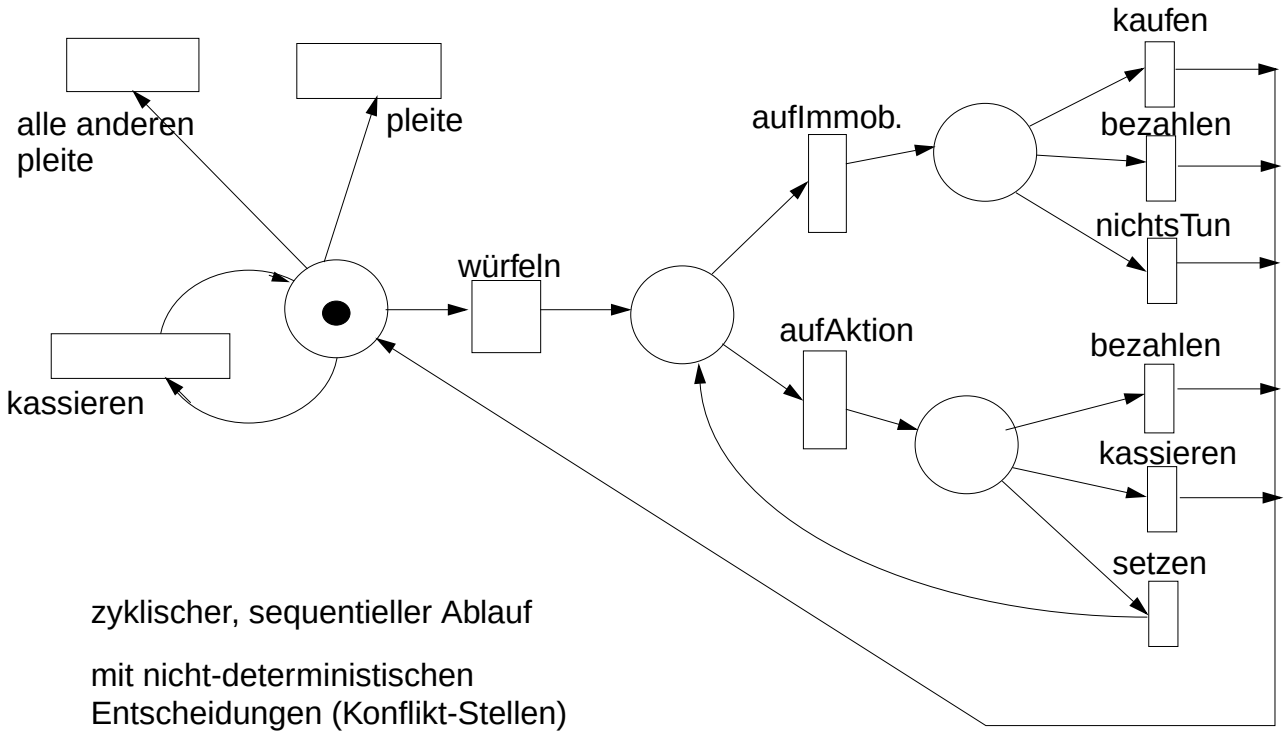
DEA liefert ein grobes Modell aus eingeschräkter Sicht:

- Nur die Sicht eines Spielers - nicht verzahnte Aktionen mehrerer Spieler;
- Aktionen ohne Parameter (z. B. gewürfelte Zahl, gezahlter Preis).

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

8.2.c Aktionsfolgen eines Spielers (Petri-Netz)



zyklischer, sequentieller Ablauf

mit nicht-deterministischen Entscheidungen (Konflikt-Stellen)

Vorlesung Modellierung WS 2007/2008 / Folie 814

Ziele:

Aktionsfolgen mit Petri-Netz modellieren

in der Vorlesung:

Vergleich mit DEA in Mod-8.13:

- DEA-Übergänge sind hier Transitionen.
- nicht-deterministische Entscheidungen werden hier deutlich modelliert.
- Auch hier gibt es keine Parameter der Aktionen.
- Das Petri-Netz kann leicht erweitert werden, sodass die verzahnten Aktionsfolgen mehrerer Spieler deutlich modelliert werden.
- Diese Möglichkeit von Petri-Netzen wird in dieser Version noch nicht genutzt.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 8.2

9 Zusammenfassung
Zusammenfassung der Themen und Begriffe (1)

1 Modellbegriff

2 Wertebereiche beschrieben d. Mengen

Mengen, extensional, intensional, Operationen
Potenzmengen
Kartesisches Produkt
Indexmengen
Folgen
Relationen, Eigenschaften von Relationen
Ordnungsrelationen
Funktionen, Eigenschaften,
spezielle Funktionen
disjunkte Vereinigung

2x Beweise verstehen und konstruieren

Satz, Voraussetzung, Behauptung, Beweis
Widerspruchsbeweis, Induktionsbeweis

3.1 Terme

Sorten, Signatur
korrekte Terme, Grundterme
Präfix-, Postfix-, Infix-Form, Funktionsform
Kantorowitsch-Bäume
Substitution
Umfassende Terme
Unifikation, allgemeinster Unifikator
Unifikationsverfahren

3.2 Algebren

Abstrakte Algebra, Axiome
Konkrete Algebra
Datenstrukturen: Keller, Binärbaum
Konstruktor, Hilfskonstruktor, Projektion
Normalform

Ziele:

Verdeutlichen, was wir gelernt haben.

Zusammenfassung der Themen und Begriffe (2)

4.1 Aussagenlogik

AL Formeln, logische Junktoren
Belegung, Interpretation
Wahrheitstafeln
erfüllbar, unerfüllbar, allgemeingültig (Tautologie)
Gesetze der booleschen Algebra
aussagenlogischer Schluss

4.2 Prädikatenlogik

PL Formeln,
gebundene und freie Variable
Wirkungsbereich von Quantoren
Umbenennung von Variablen
Interpretation von PL Formeln
Individuenbereich
Beschränkung von Wertebereichen
Umformungen, Normalformen
erfüllbar, unerfüllbar, allgemeingültig
PL Schluss

4.3 Verifikation (Hoaresche Logik)

Aussage charakterisiert Programmzustände
Zuweisungsregel
Konsequenzregeln, Sequenzregel,
2-seitige Alternative, bedingte Anweisung,
Schleife, Schleifeninvariante,
Schleife aus Invariante konstruieren
Terminierung von Schleifen

Ziele:

Verdeutlichen, was wir gelernt haben.

Zusammenfassung der Themen und Begriffe (3)

5 Graphen

5.1 Grundlegende Definitionen

Gerichtetet, ungerichteter Graph,
Multigraph, Teilgraph,
Grad, Eingangs-, Ausgangsgrad
Adjazenzmatrix, Adjazenzlisten

5.2 Wegeproblem

Weg, Kreis, Zyklus,
gerichteter azyklischer Graph,
zusammenhängend,
Zusammenhangskomponente,
Euler-Weg, Euler-Kreis, Hamilton-Kreis

5.3 Verbindungsprobleme

Baum, Spannbaum,
Schnittknoten, Brückenkante
orientierbarer Graph

5.4 Modellierung mit Bäumen

Gerichteter Baum, Wurzel, Höhe, Blätter
Binärbäume,
Entscheidungsbäume
Strukturbäume

5.5 Zuordnungsprobleme

Paarweise Zuordnung (Matching),
bipartit,
Färbung

5.6 Abhängigkeitsprobleme

Abhängigkeitsparagraph,
Anordnung (Scheduling),
Ablaufparagraph,
Aufrufgraph,
Programmablaufgraph

Ziele:

Verdeutlichen, was wir gelernt haben.

Zusammenfassung der Themen und Begriffe (4)

6. Modellierung von Strukturen

6.1 Kontextfreie Grammatiken

Terminale, Nichtterminale, Startsymbol
Produktionen,
Ableitung, Sprache einer KFG,
Ableitungsbaum

6.2 Baumstrukturen in XML

XML-Sprachen, Tag-Klammern,
KFG definiert Bäume (entspr. DTD)

6.3 Entity Relationship Modell

Entity-Menge, konkrete Ausprägung,
Attribut, Schlüsselattribut
Relation, Rollen, Kardinalität
IST-Spezialisierung

6.4 Klassendiagramme in UML

Vergleich mit ERM

7. Modellierung von Abläufen

7.1 Endliche Automaten

Alphabet, reguläre Ausdrücke
deterministisch, nicht-deterministisch
Zustände, Übergangsfunktion
akzeptierte Sprache
NEA-DEA-Konstruktion,
Ausgabe, Mealy-Automat, Moore-Automat,
UML Statecharts

7.2 Petri-Netze

Stellen, Transitionen, Markierungsfunktion,
Schaltregel, Markierungsgraph,
zyklische Prozesse, binäres Netz,
Lebendigkeit, Verklemmung (deadlock),
Kapazitäten, Gewichte, beschränkter Puffer,
Leser-Schreiber-System

8. Fallstudien

Auftragsabwicklung in Autowerkstatt
Monopoly-Spiel
Getränkeautomat (Übungen)

Ziele:

Verdeutlichen, was wir gelernt haben.