2 Modellierung mit Wertebereichen

In der Modellierung von Systemen, Aufgaben, Lösungen kommen **Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung** vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, **aus welchem Wertebereich sie stammen**, aber noch offen gelassen, welchen Wert sie haben.
Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welche ist die höchste?

Die Beschreibung des Modells wird präzisiert durch **Angabe der Wertebereiche**, aus denen die Objekte, Konstanten, Werte von Variablen, Eingaben, Ausgaben, Lösungen, usw. stammen.

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**
Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel: Modellierung von Kartenspielen

Wertebereich	**einige Elemente daraus**
KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}	8 Dame
KartenArten := {Kreuz, Pik, Herz, Karo}	Pik
Karten := KartenArten $\times$ KartenSymbole Menge aller Paare aus KartenArten und KartenSymbole	(Kreuz, 8) (Herz, Dame)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 201

Ziele:

Beschreibung von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- präzise Angabe von Wertebereichen,
- Informationsgehalt untersuchen

Verständnisfragen:

Karten eines Kartenspieles werden auf 2 Spieler verteilt. Beschreiben Sie den Wertebereich einer solchen Verteilung in Worten.

Übersicht über Begriffe

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**

Grundlegender Kalkül: **Mengenlehre** (halbformal);
Mengen und Mengenoperationen

Strukturen über Mengen zur Bildung **zusammengesetzter Wertebereiche**

- Potenzmengen
- kartesische Produkte, Tupel
- Folgen
- Relationen
- Funktionen
- disjunkte Vereinigungen

Verwendung des Kalküls:

Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen

Grundlage für alle anderen formalen Kalküle

abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 202

Ziele:

Übersicht zu diesem Abschnitt

in der Vorlesung:

Rolle der Mengen und Strukturen darüber;
Hinweise auf Bezüge zu

- anderen Kalkülen,
- Datentypen in Programmiersprachen

Einführendes Beispiel

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 203

Ziele:

Definition von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Aufgabe
- Präzise Modellierung interessiert hier - nicht Verfahren, um Lösungen zu finden.
- Modellierung auf der nächsten Folie

Wertebereiche für das Beispiel

Beschreibung	**formale Angaben**
Menge der Nationen	Nationen := {A, B, C}
Indexmenge zur Unterscheidung der Delegierten	Ind := {1, 2, 3, 4}
ein Delegierter modelliert durch ein **Paar**	(a, i) mit $a \in$ Nationen, $i \in$ Ind
Wertebereich der Delegierten	Delegierte := Nationen $\times$ Ind

Wertebereich der Arbeitsgruppen
3-Tupel, kartesischesProdukt AGn := $\{(A, i) \mid i \in \text{Ind}\} \times \{(B, j) \mid j \in \text{Ind}\} \times \{(C, k) \mid k \in \text{Ind}\}$

Wertebereich für **Teilmengen** von Sprachen	SprachMengen := Pow (Nationen) Pow (M) ist die **Potenzmenge** von M
Eine **Funktion** Sp gibt an, welche Sprachen ein Delegierter spricht:	$Sp \in$ DSpricht
Wertebereich solcher Funktionen	DSpricht := Delegierte -> SprachMengen

Wertebereich der gemeinsamen Sprachen einer AG

Wertebereich	AGSpricht := AGn -> SprachMengen
GemSp ist eine Funktion daraus	GemSp $\in$ AGSpricht

N := M bedeutet „**Der Name N ist definiert als M**".

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 204

Ziele:

Beispiele im Zusammenhang sehen

in der Vorlesung:

- Vorschau auf Anwendung des Kalküls,
- informelle Erläuterungen,
- Werte aus den Wertebereichen angeben

Verständnisfragen:

- Geben Sie zu jedem der Wertebereiche einen konkreten Wert als Beispiel an.

2.1 Mengen

Menge: Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge M. a ist Element aus M wird notiert a $\in$ M.

Definition von Mengen durch

- **Aufzählen der Elemente (extensional)**: M := {1, 4, 9, 16, 25}
- **Angabe einer Bedingung (intensional)**: M := { a | a $\in$ ℕ, a ist Quadratzahl und a $\leq$ 30}
  allgemein: M := { a | P (a) }
  wobei P (a) eine Aussage über a ist, die wahr oder falsch sein kann.

Mengen können **endlich** (z. B. {1, 4, 9, 16, 25}) oder **nicht-endlich** sein (z. B. { a | a $\in$ ℕ, a ist Quadratzahl })

Die **leere Menge** wird { } oder ∅ geschrieben.

Die **Anzahl der Elemente** einer Menge M heißt die **Kardinalität** von M, geschrieben | M | oder Card(M)

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205

Ziele:

Definition von Mengen verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele zu den Eigenschaften.
- Hier informelle Definition des Mengenbegriffs; axiomatische Mengenlehre definiert ihn strenger.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele jeweils für unterschiedliche intensionale und für unterschiedliche extensionale Definitionen derselben Menge.
- Vergleichen Sie den Mengenbegriff mit dem aus Mathe I.
- Geben Sie Mengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften von Mengen

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- **Alle Elemente einer Menge sind verschieden.**
- **Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet.**
- **Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen notiert werden:**

{ 1, 2, 3, 4 }   { i | i $\in$ ℕ, 0 < i < 5 }   { 1, 1, 2, 2, 3, 4 }   { 2, 4, 1, 3 }

Mengen können aus **atomaren oder zusammengesetzten** Elementen gebildet werden,
z. B. nur atomare Elemente: { 1, 2, 3, 4 } { rot, gelb, blau } { Kreuz, Pik, Herz, Karo } { 1 }
Menge von Paaren: { (Pik, 10), (Herz, Dame) }
Menge von Mengen: { {rot, blau}, {blau}, ∅ } { ∅ }

Die **Existenz von atomaren Objekten** des jeweiligen Modellierungsbereiches wird vorausgesetzt, z. B. die natürlichen Zahlen, Arten und Werte von Spielkarten.

Eine Menge kann auch **verschiedenartige Elemente** enthalten,
z. B. {1, (Pik, 10), rot, 9}
aber **nicht bei der Modellierung mit Wertebereichen:** hier sollen alle Elemente eines Wertebereiches gleichartig sein.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205a

Ziele:

Definition von Mengen verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele zu den Eigenschaften.
- Hier informelle Definition des Mengenbegriffs; axiomatische Mengenlehre definiert ihn strenger.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele jeweils für unterschiedliche intensionale und für unterschiedliche extensionale Definitionen derselben Menge.
- Vergleichen Sie den Mengenbegriff mit dem aus Mathe I.
- Geben Sie Mengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Russels Paradoxon

Man muss prinzipiell entscheiden können, ob ein Wert a **Element einer Menge** M ist, „$a \in M$?“

Russels Paradoxon:

Sei P die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten,
also $P := \{ x \mid x \notin x \}$.

Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum **Widerspruch**.

Um solche Anomalien auszuschließen, geben wir in **intensionalen Mengendefinitionen** an, aus welchem größeren, **schon definierten Wertebereich** die Elemente stammen:

$M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, \text{a ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$

hier also „$a \in \mathbb{N}$“.

Damit tatsächlich entschieden werden kann, **welche Elemente M enthält**, muss die Bedingung über a (hier „a ist Quadratzahl und $a \leq 30$“) **entscheidbar** sein.

Diese Einschränkungen schließen nicht aus, Mengen **rekursiv zu definieren**, z. B.

$\text{Sonnensystem} := \{\text{Sonne}\} \cup \{ x \mid x \in \text{Himmelskörper}, x \text{ umkreist } y, y \in \text{Sonnensystem} \}$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 205r

Ziele:

Intensionale Definitionen können widersprülich sein

in der Vorlesung:

- Paradoxon erläutern.
- Beispiel: "Der Barbier rasiert alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren." Ist er Element dieser Menge?

Mengenoperationen

Teilmenge von	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
echte Teilmenge von	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$

M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 206

Ziele:

Vorstellung der Mengenoperatoren

in der Vorlesung:

- Hinweis auf algebraische Gesetze; werden hier nicht vertieft

Verständnisfragen:

- Schlagen Sie die algebraischen Gesetze der Mengenoperatoren nach.

2.2 Potenzmengen

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U, geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U).
Pow (U) := $\{M \mid M \subseteq U\}$

Kardinalität: $|\text{Pow}(U)| = 2^n$ wenn $|U| = n$

Beispiele:

Grundmenge $U_1 := \{a, b\}$ Potenzmenge Pow $(U_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Grundmenge $U_2 := \{1, 2, 3\}$ Pow $(U_2) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$

Wenn die **Werte Teilmengen von U** sind, ist ihr **Wertebereich die Potenzmenge von U**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 207

Ziele:

Potenzmenge als Wertebereich verstehen

in der Vorlesung:

- Kardinalität begründen
- Beispiele,
- Wert - Wertebereich; Menge - Potenzmenge
- Aufgabe mit Lösungsmenge

Verständnisfragen:

- Begründen sie die Kardinalitätsformel.
- Geben Sie Potenzmengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Modellierung mit Potenzmengen

Beispiel 2.1: Wertebereich der Sprachen, die ein Delegierter spricht
SprachMengen := Pow (Nationen), $\{A, B\} \in$ SprachMengen

Modellierungstechnik: Menge von Lösungen statt einer Lösung
Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen fragen.
Der Wertebereich der Antwort ist die **Potenzmenge** des Wertebereiches der Lösungen.

Vergleiche auch **Mengentyp** in Pascal:

```
type Sprachen = set of {A, B, C};
var spricht: Sprachen;
spricht := {A, B};
```


Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 207a

Ziele:

Potenzmenge als Wertebereich verstehen

in der Vorlesung:

- Kardinalität begründen
- Beispiele,
- Wert - Wertebereich; Menge - Potenzmenge
- Aufgabe mit Lösungsmenge

Verständnisfragen:

- Begründen sie die Kardinalitätsformel.
- Geben Sie Potenzmengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.3 Kartesische Produkte

Kartesisches Produkt der Mengen M und N:
Menge **aller geordneten Paare** mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N

$M \times N := \{z \mid z = (x, y) \text{ und } x \in M \text{ und } y \in N\}$

oder kürzer $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

Enthält **alle Kombinationen** von Werten aus M und N.
Falls $M = \emptyset$ oder $N = \emptyset$, ist $M \times N = \emptyset$.

z. B. Delegierte := Nation $\times$ Ind = { (A, 1), (A, 2),..., (B, 1), (B, 2), ... }

Verallgemeinert zu **n-Tupeln** (n>1, geordnet):

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I\}$ mit $I := \{1, \ldots, n\}$ und $n > 1$

z. B. Daten := Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre, (24, 10, 2011) $\in$ Daten

Folgende Wertebereiche sind verschieden. Ihre Elemente haben **unterschiedliche Struktur**:

$(a, b, c) \in A \times B \times C$ $\qquad$ $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$

Notation bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = \mathbf{M^n}$ mit n > 1

Beispiel:

Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Kardinalität: $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n | = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1,..., n\}$ mit n > 1

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208

Ziele:

Zusammengesetzte Wertebereiche verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ordnung der Komponenten ist wichtig.
- Beispiel für geschachtelte Tupel

Verständnisfragen:

- Was ist der Unterschied zwischen Nation x Ind x SprachMengen und (Nation x Ind) x SprachMengen?
- Welches ist besser im Sinne von Beispiel 2.1?
- Geben Sie kartesische Produkte an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.4 Disjunkte Vereinigung

Die allgemeine **disjunkte Vereinigung** fasst n Wertebereiche (Mengen) $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots, A_n$ zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammen, wobei $i \in I := \{1, ..., n\}$.
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (engl. tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Anwendungsmuster:

V ist ein allgemeinerer Wertebereich, er abstrahiert von den spezielleren A_i

Beispiele:

Geschäftspartner := { (Kunde, Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, Unity), (Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)} mit
Kunden := {Siemens, Benteler, Unity} Lieferanten := {Orga, Siemens}
Ind := {Kunde, Lieferant}

Buchstaben := {a, b, ..., z} Ziffern := {0, 1, ..., 9} Ind := {Buchstabe, Ziffer}

Zeichen = $\{ (\text{Buchstabe}, b) \mid b \in \text{Buchstaben}\} \cup \{ (\text{Ziffer}, z) \mid z \in \text{Ziffern}\}$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208a

Ziele:

Kennzeichnung von Werten

in der Vorlesung:

- Rolle des Kennzeichenfeldes
- Klassifikation von Wertebereichen
- Vergleich mit Varianten-Records in Pascal

Verständnisfragen:

Geben Sie Wertebereiche mit disjunkten Vereinigungen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.5 Folgen

Endliche Folgen von Elementen aus A:

Sei **A^0** := { ε } die Menge, die **nur die leere Folge** über A, ε **bzw. (),** enthält,
A^1 := { (a) | a ∈ A} die Menge **einelementiger Folgen** über A,
A^n mit n > 1 die Menge der **n-Tupel** über A,

dann ist **A^+** := { x | x ∈ A^i und i ≥ 1 }
die Menge der **nicht-leeren Folgen** beliebiger Länge über A

und **A^* :=** $A^+ \cup A^0$ die Menge von Folgen über A,
die **auch die leere Folge** enthält.

Folgen notieren wir wie Tupel, d. h. $(a_1, ..., a_n) \in A^+$ für n ≥ 1 und $a_i \in A$; () ∈ A^*

Beispiele:

$(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$
(m, o, d, e, l, l) ∈ Buchstaben^+
neueAufträge := Auftrag^*
gezogeneKarten := Karten*

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 208b

Ziele:

Folgen gleichartiger Elemente

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- 1-Tupel und 0-Tupel sind auf Folie Mod2.8 nicht als kartesische Produkte definiert. Deshalb werden hier leere und einelementige Folgen definiert.
- + und * Notation erläutern
- weitere Beispiele
- Verwendung der leeren Folge

Verständnisfragen:

- Aus einer Folge natürlicher Zahlen sollen die geraden Zahlen gestrichen werden. Aus welchem Wertebereich stammt das Ergebnis?
- Geben Sie Folgen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

2.6 Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.
n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ mit n > 1
R ist also eine Menge von n-Tupeln.

Wertebereich von R: $R \in \text{Pow}(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)$

Eine **1-stellige Relation** R über einer Menge M ist eine Teilmenge von M,
also R∈ Pow (M).

Eine Relation R definiert eine **Aussage über Tupel**.
Wir sagen auch: „Eine Relation R gilt für die Tupel, die R enthält.“

Beispiele:

Relation $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Element daraus: (27, 42) ∈ ≤ also gilt 27 ≤ 42
NationenKleiner := {(A, C), (C, B), (A, B)} ⊆ Nationen^2

Menüs22-10 := {(Lauchsuppe, Putenbraten, Eisbecher),
(Lauchsuppe, Kalbsteak, Ananas), (Salat, Omelett, Ananas)}
Menüs22-10 ⊆ Vorspeisen × Hauptgerichte × Desserts mit

Vorspeisen := {Lauchsuppe, Salat, ...};
Hauptgerichte := {Putenbraten, Kalbsteak, Omelett, ...}
Desserts := {Eisbecher, Ananas, Schokoladenpudding, ...}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 209

Ziele:

Allgemeine Relationen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Zusammenhang zwischen Relationen und Aussagen über Tupel.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele für Relationen zwischen Werten aus unterschiedlichen Wertebereichen.
- Geben Sie Relationen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Kardinalität, Schreibweisen

Der **Wertebereich Pow ($M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$)** hat die **Kardinalität**

$|\mathbf{Pow}\ (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)| = 2^{\prod_{i \in I} |Mi|}$, falls alle M_i endlich sind.

d.h. es gibt $2^{\prod_{i \in I} |Mi|}$ verschiedene Relationen in dem Wertebereich.

Intensionale Definition einer Relation:

GültigeDaten $\subseteq$ Daten = Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre

GültigeDaten := { (t, m, j) | t, m, j $\in \mathbb{N}$, m≤12,
(m$\in$ {1,3,5,7,8,10,12} $\wedge$ t $\leq$ 31) $\vee$
(m$\in$ {4,6,9,11} $\wedge$ t $\leq$ 30) $\vee$
(m = 2 $\wedge$ t $\leq$ 29 $\wedge$ Schaltjahr (j)) $\vee$
(m = 2 $\wedge$ t $\leq$ 28 $\wedge$ $\neg$ Schaltjahr (j))}

(24, 10, 2011), (29, 2, 2012) $\in$ GültigeDaten, (31, 4, 2010) $\notin$ GültigeDaten

alternative Schreibweisen für Elemente aus Relationen:
R(a) für a $\in$ R, z. B. GültigeDaten(24, 10, 2011)

bei 2-stelligen Relationen auch mit Operatoren:
x R y für (x, y) $\in$ R, z. B. $x \leq y$, $a \neq b$, $p \rightarrow q$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 209a

Ziele:

Allgemeine Relationen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Zusammenhang zwischen Relationen und Aussagen über Tupel.

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele für Relationen zwischen Werten aus unterschiedlichen Wertebereichen.
- Geben Sie Relationen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für zweistellige Relationen R $\subseteq$ M $\times$ M mit M $\neq \emptyset$ sind folgende Begriffe definiert:

- **reflexiv**, wenn für alle x $\in$ M gilt: x R x;
- **irreflexiv**, wenn für kein x $\in$ M gilt: x R x;
- **symmetrisch**, wenn für alle x, y $\in$ M gilt: aus x R y folgt y R x;
- **antisymmetrisch**, wenn für alle x, y $\in$ M gilt: aus x R y und y R x folgt x = y;
- **asymmetrisch**, wenn für alle x, y $\in$ M gilt: aus x R y folgt, y R x gilt nicht;
- **transitiv**, wenn für alle x, y, z $\in$ M gilt: aus x R y und y R z folgt x R z;
- **total**, wenn für alle x, y $\in$ M gilt: x R y oder y R x;

Hinweise zum Anwenden der Definitionen (genauer in Kap. 4.1, 4.2):

1. „**x R y**“ bedeutet „**(x, y) $\in$ R**“
2. „für alle x $\in$ M gilt ...“: der **gesamte Wertebereich M** muss geprüft werden
3. „für alle x, y $\in$ M gilt ...“: alle Paare von Werten aus M prüfen, auch solche mit x = y
4. „A **oder** B“ ist wahr, wenn **mindestens eins von beiden wahr** ist
5. „**aus A folgt B**“ ist gleichwertig zu „**(nicht A) oder B**“.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210

Ziele:

Definitionen verstehen und einprägen

in der Vorlesung:

- Die Form der Definitionen wird erläutert.
- Das Prüfen der Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} erläutert.
- Im Buch "Modellierung" ist auf den Seiten 36 und 37 die Eigenschaft "alternative Relation" falsch definiert, bzw. erklärt. Zur Korrektur ersetze man in den Definitionen 2.10 und 2.12 sowie in der Tabelle auf Seite 37 oben den Begriff "alternativ" durch "total".

Verständnisfragen:

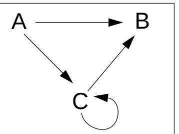
- Konstruieren Sie zu jeder Eigenschaft eine Relation R über M = {A, B, C}, die die Eigenschaft nicht erfüllt. Beschreiben Sie R in Worten.

Beispiele für Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Eigenschaft ist	sei M = { A, B, C } z.B. erfüllt von R = ...	z.B. nicht erfüllt von R = ...
reflexiv	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B)}	{(A,A), (B,C)}
irreflexiv	{(A,B)}	{(A,A)}
symmetrisch	{(A,B), (B,A), (C,C)}	{(A,B)}
antisymmetrisch	{(A,B), (C,C)}	{(A,B), (B,A)}
asymmetrisch	{(A,B), (C,A)}	{(A,B), (B,A)} oder {(C,C)}
transitiv	{(A,B), (B,C), (A,C)}	{(A,B), (B,C)}
total	{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B), (B,C), (A,C), (C,B)}	{(A,A), (A,B), (A,C)}

{(A,B), (A,C), (C,B), (C,C)}

als gerichteter Graph:
(siehe Kap. 5)



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210a

Ziele:

Eigenschaften am Beispiel prüfen

in der Vorlesung:

Einige Beispiele werden erläutert.

Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ ist eine

- **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Quasiordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **totale** oder **lineare Ordnung**, wenn R eine totale Halbordnung ist,
  also total, (reflexiv,) antisymmetrisch und transitiv;
- **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Aussagen zu diesen Definitionen

1. Alle solche Ordnungsrelationen sind transitiv.
2. Ist R eine totale Ordnung, dann ist R auch eine Halbordnung und eine Quasiordnung.
3. Nur für totale Ordnungen wird gefordert, dass alle Elemente aus M „vergleichbar“ sind (total).
4. Enthält R „Zyklen über verschiedene Elemente“, z.B. $(a, b), (b, a) \in R$ mit $a \neq b$,
   dann ist R weder eine Halbordnung, strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210c

Ziele:

Definition der Ordnungsrelationen verstehen

in der Vorlesung:

- Die Definitionen werden erläutert.
- Die Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} sowie an < und <= über N geprüft erläutert.

Verständnisfragen:

- Beschreiben Sie den Unterschied zwischen Halbordnung und totaler Ordnung. Geben Sie ein Beispiel dazu an.

Beispiele für Ordnungsrelationen

sei $M = \{A, B, C\}$,
$eq_M := \{(A,B), (B,A), (A,A), (B,B), (C,C)\}$
$<_M := \{(A,B), (B,C), (A,C)\}$,
$\leq_M := \{(A,B), (B,C), (A,C), (A,A), (B,B), (C,C)\}$

$\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

	$<_M$	$\leq_M$	eq_M	$<$	$\leq$
reflexiv	**-**	**+**	**+**	**-**	**+**
irreflexiv	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
symmetrisch	**-**	**-**	**+**	**-**	**-**
antisymmetrisch	**+**	**+**	**-**	**+**	**+**
asymmetrisch	**+**	**-**	**-**	**+**	**-**
transitiv	**+**	**+**	**+**	**+**	**+**
total	**-**	**+**	**-**	**-**	**+**
	strenge Ordnung	**totale**	**Äquivalenz**	**strenge**	**totale**

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 210d

Ziele:
Beispiele für Ordnungsrelationen

in der Vorlesung:
Die Beispiele werden erläutert.

2.7 Funktionen

Eine **Funktion f ist eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times B$** mit folgender Eigenschaft:
Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$, d. h. zu einem $x \in D$ gibt es höchstens ein Bild y.

D ist der **Definitionsbereich** von f; B ist der **Bildbereich** von f
D und B können beliebige, auch zusammengesetzte Wertebereiche sein.

Der **Wertebereich D -> B** ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B $\subseteq$ Pow (D $\times$ B).**
D -> B enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über **D $\times$ B**, die Funktionen sind.

Statt **f $\in$ D -> B** sagt man auch **f hat die Signatur D -> B** oder kurz **f: D -> B**

Schreibweisen für $(x, y) \in f$ auch $y = f(x)$ oder $f(x) = y$ oder $x f y$

Die Menge aller Paare $(x, y) \in f$ heißt **Graph von f**.

Eine Funktion $f \in D$ -> B heißt
n-stellig, wenn der Definitionsbereich D ein Wertebereich von n-Tupeln ist, $n > 1$;
1-stellig, wenn D nicht als kartesisches Produkt strukturiert ist und nicht leer ist.

Man spricht auch von **0-stelligen Funktionen**, wenn D der **leere Wertebereich** ist;
0-stellige Funktionen sind **konstante Funktionen** für jeweils einen **festen Wert b = f()**;
man kann sie allerdings nicht als Menge von Paaren angeben.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 211

Ziele:
Grundbegriffe von Funktionen verstehen

in der Vorlesung:
- Begriffe an Beispielen erläutern
- unterscheiden: Funktion, ihre Definition, der Wertebereich, aus dem sie stammt

Achtung! unterschiedliche Verwendung von Begriffen:
- hier: Der **Wertebereich D -> B** ist die Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden.
- hier: Die Funktion f: D -> B hat den **Bildbereich B**.
- Mathe I: Der **Wertebereich einer Funktion f: D -> B ist B**
- Goos: Der Bildbereich einer Funktion f: D -> B ist **Bild(f) = B** . (Werde ich hier nicht verwenden.)
- Mathe I: Das **Bild von f** ist die Menge der Werte, auf die f abbildet.

Verständnisfragen:
Geben Sie Funktionen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Beispiele für Funktionen

Funktion	aus dem Wertebereich
not := {(w, f), (f, w)}	Bool -> Bool
id := {(w,w), (f, f)}	Bool -> Bool
oder := {((w,w),w), ((w,f),w), ((f,w),w), ((f,f),f)}	Bool $\times$ Bool -> Bool
Quadrat := {(a, b) | a, b $\in$ $\mathbb{N}$ und b = a*a}	$\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
ggt := {((a,b),c) | a, b, c $\in$ $\mathbb{N}$ und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und b}	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
Sp := {((A, 1), {A,B}), ((B, 2), {B})}	Delegierte -> SprachMengen

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 211b

Ziele:

Beispiele zu Funktionen

in der Vorlesung:

Beispiele erläutern

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion **f : D -> B** heißt

- **total**, wenn es für jedes x $\in$ D ein Paar (x, y) $\in$ f gibt,
- **partiell**, wenn nicht verlangt wird, dass f für alle x $\in$ D definiert ist,
- **surjektiv**, wenn es zu jedem y $\in$ B ein Paar (x, y) $\in$ f gibt,
- **injektiv**, wenn es zu jedem y $\in$ B höchstens ein Paar (x, y) $\in$ f gibt,
- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen $| D \to B | = (| B |+1)^{|D|}$

Anzahl der totalen Funktionen in | D -> B | ist $| B |^{|D|}$

... falls D und B endlich sind.

Anzahl der Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen mit dieser Signatur

z. B. |{A, B, C} -> {w, f}| = 3^3 = 27 insgesamt; 2^3= 8 totale Funktionen in |{A, B, C} -> {w, f}|

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 212

Ziele:

Begriffe einprägen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Begriffe erläutern
- Graphiken dazu
- Kardinalität begründen

Verständnisfragen:

- Charakterisieren Sie die Eigenschaften graphisch.

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion

$\mathbf{id_M}$: M -> M mit id_M := { (x, x) | x ∈ M }

Charakteristische Funktion χ_M einer Menge M ⊆ U, mit der Trägermenge U

gibt für jedes Element der Trägermenge U an, ob es in M enthalten ist:

χ_M : U -> Bool mit χ_M := { (x, b) | x ∈ U und b = (x∈M)}

χ_M ist eine totale Funktion

Funktionen mit dem Bildbereich Bool heißen **Prädikate**.

z. B. <= : ($\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$) -> Bool

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213

Ziele:

Spezielle Anwendungsmuster

in der Vorlesung:

- Zusammenhang zu Relationen erläutern.
- Beispiele für charakteristische Funktionen und Multimengen angeben.

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Anwendungen für solche Funktionen an.

Funktionen zur Modellierung von mehrfachen Vorkommen

In sogenannte **Multimengen (engl. bags)** können einige Werte mehrfach vorkommen.
Es ist relevant, wieoft jeder Wert vorkommt.

Das **mehrfache Vorkommen** von Werten in einer Multimenge modellieren wir mit einer Funktion:

b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt, z. B.

geldBeutel ∈ EUMünzen -> $\mathbb{N}_0$ mit

geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (20, 4), (50, 1), (100, 3), (200, 2)}

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213a

Ziele:

Spezielle Anwendungsmuster

in der Vorlesung:

- Zusammenhang zu Relationen erläutern.
- Beispiele für charakteristische Funktionen und Multimengen angeben.

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Anwendungen für solche Funktionen an.

Funktionen auf Indexmengen

Indexmengen dienen zur Unterscheidung von Objekten des Modellbereiches
z. B. Ind = {1, ..., n}, KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

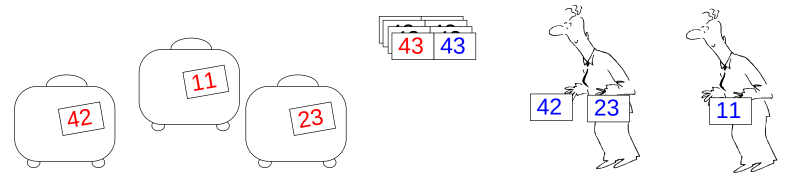
Funktionen auf Indexmengen modellieren ...

das Auftreten von Werten in Folgen:

Beispiel:

eine Folge	F :=	(w, e, l, l, e)
Indexmenge dazu	FPositionen :=	{1, 2, 3, 4, 5}
Werte in der Folge	FWerte :=	{w, e, l}
Auftreten von Werten in der Folge	FAuftreten :=	{(1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e)}
Wertebereich	FAuftreten $\in$ FPositionen -> FWerte	

Zuordnungen zwischen Mengen:
z. B. Gepäckstücke ihren Eigentümern zuordnen durch ein Funktionenpaar
Marke1 $\in$ Ind -> Gepäckstücke (injektiv)   Marke2 $\in$ Ind -> Eigentümer



Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 213b

Ziele:
Zwei Modellierungsschemata

in der Vorlesung:
- Unterschied: "Werte, die (irgendwo) auftreten", "verschiedene Auftreten eines Wertes".
- Zuordnen durch Markieren mit der gleichen Marke,

Verständnisfragen:
- Warum muss Marke1 injektiv sein, Marke2 aber nicht?
- Geben Sie weitere Anwendungen für Funktionen mit Indexmengen an.

Hinweise zum Modellieren mit Wertebereichen

- Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden.
- Typische Elemente eines Wertebereiches angeben - der Wertebereich ist eine Menge davon.
- Wertebereichen ausdruckskräftige Namen geben.
- Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen (oder zerlegen).
- Entwürfe prüfen: Wertebereiche in Worten erklären.
- Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich.
- Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln.
- Alle Klammern haben Bedeutung - zusätzliche verändern das Modell.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 214a

Ziele:
Modellierungsfehler vermeiden

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu an typischen Fehlern

Übungsaufgaben:
Untersuchen Sie:
- Welche Aspekte des Getränkeautomaten können Sie mit Mengen als Wertebereichen gut Modellieren?
- Für welche Aspekte eignet sich der Kalkül nicht so gut.

Wertebereiche zur Modellierung des Getränkeautomaten

Folgende Aspekte des Getränkeautomaten
können durch Wertebereiche Modelliert werden:

- Getränkevarianten
- Vorrat an Getränken und Zutaten
- Vorrat an Wechselgeld
- Eingeworfene Münzen
- Betätigte Wahltasten
- Anzeige des Automaten
- Zustand des Automaten
- weitere Aspekte ...

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 214b

Ziele:

Anregung zur Modellierung des Getränkeautomaten

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu