

## 2x Beweise verstehen und konstruieren

### **Beweise werden in vielen Gebieten der Informatik benötigt**

- innerhalb von **Informatik-Theorien**  
z.B. Komplexität von Aufgaben und Algorithmen
- **Eigenschaften von modellierten Aufgaben**  
z.B. Falls ein ungerichteter Graph zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen Weg von Knoten a nach Knoten b.
- **Entwurf von Hardware und Software**  
z.B. Diese Synchronisation der „Dining Philosophers“ führt nie zur Verklemmung.
- **Eigenschaften implementierter Software oder Hardware**  
Verifikation von Programmeigenschaften

Dieses Thema wird im Buch „Modellierung“ im Abschnitt 4.3 behandelt.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 251

### **Ziele:**

Beweisen in der Informatik motivieren

### **in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

## Beispiel 1

### Satz 2x.1:

Seien  $A$  und  $B$  zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge  $M$ . Dann ist  $C = A \cup B$  auch eine antisymmetrische Relation.

### Beweis:

Wegen der Definition von antisymmetrisch gilt:

Für alle  $x, y \in M$  gilt: Aus  $x A y$  und  $y A x$  folgt  $x = y$ .

Ebenso gilt:

Für alle  $x, y \in M$  gilt: Aus  $x B y$  und  $y B x$  folgt  $x = y$ .

Wegen  $C = A \cup B$  sind alle Elemente aus  $A$  oder  $B$  auch Elemente von  $C$  und es gilt:

Für alle  $x, y \in M$  gilt: Aus  $x C y$  und  $y C x$  folgt  $x = y$ .

Also ist auch  $C$  antisymmetrisch.

**qed.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 252

### Ziele:

Beweis verstehen und prüfen

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Gegenbeispiel

### Der Satz 2x.1

Seien A und B zweistellige, antisymmetrische Relationen über der Menge M. Dann ist  $C = A \cup B$  auch eine antisymmetrische Relation.

**ist nicht korrekt.** Man kann ihn durch ein **Gegenbeispiel widerlegen:**

z.B.  $A = \{(a, a), (b, c)\}$ ,  $B = \{(d, d), (c, b)\}$ ,  $C = \{(a, a), (b, c), (d, d), (c, b)\}$

**Der „Beweis“ von Satz 2x.1 ist fehlerhaft.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 253

### Ziele:

Beweis verstehen und prüfen

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Beispiel 2

### Satz 2x.2:

Seien  $A$  und  $B$  zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge  $M$ . Dann ist  $C = A \cup B$  auch eine symmetrische Relation.

### Beweis:

Sind  $A$  und  $B$  leer, dann ist auch  $C$  leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

Ist  $C$  nicht leer, dann sei  $x C y$  für beliebige  $x$  und  $y$ .

Wegen  $C = A \cup B$  gilt  $x A y$  oder  $x B y$ .

Falls  $x A y$  gilt, dann ist auch  $y A x$ , weil  $A$  symmetrisch ist.

Wegen  $C = A \cup B$  ist auch  $y C x$ .

Falls  $x B y$  gilt, dann ist auch  $y B x$ , weil  $B$  symmetrisch ist.

Wegen  $C = A \cup B$  ist auch  $y C x$ .

Also folgt aus  $x C y$  auch  $y C x$ . Deshalb ist auch  $C$  symmetrisch.

**qed.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 254

### Ziele:

Beweis verstehen und prüfen

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

# Eigenschaften von Beweisen

## **Beweise können**

- korrekt oder fehlerhaft,
- verständlich oder unverständlich,
- elegant oder umständlich,
- wohl-strukturiert oder verschlungen

**sein.**

## **Zur Konstruktion von Beweisen gibt es**

- **Regeln, Methoden, Strukturen, Strategien.**

Dazu wird in diesem Abschnitt eingeführt.

Erst Kapitel 4 liefert die notwendigen Grundlagen der Logik.

Das Buch [D. J. Velleman: How to prove it] enthält umfassendes Material zu diesem Thema.

**Manche Beweise benötigen außerdem eine gute Beweisidee.**

## **Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 255**

### **Ziele:**

Ziel dieses Abschnittes erkennen

### **in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

## Form von Satz und Beweis

Ein **Satz (Theorem)** besteht aus **Voraussetzungen (Prämissen)** und einer **Behauptung (Konklusion)**.

Voraussetzungen und Behauptung sind Aussagen.  
Wenn alle Voraussetzungen wahr sind, dann muss auch die Behauptung wahr sein.

### Satz 2x.2:

Seien  $A$  und  $B$  zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge  $M$ .  
Dann ist  $C = A \cup B$  auch eine symmetrische Relation.

Der **Beweis** eines Satzes muss nachweisen, dass die Behauptung wahr ist und kann dabei verwenden

- die **Voraussetzungen**,
- Definitionen oder bekannte Tatsachen,
- im Beweis selbst oder anderweitig als wahr bewiesene Aussagen,
- Schlussregeln.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 256

### Ziele:

Grundbegriffe zu Satz und Beweis

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Beweisstruktur Fallunterscheidung

Beweise können in **Fallunterscheidungen** gegliedert sein. Typische Gründe dafür:

- **Sonderfall** abspalten (z.B. leer, nicht leer)
- **oder in der Voraussetzung** (z.B.  $(x, y) \in C = A \cup B$  bedeutet  $(x, y) \in A$  **oder**  $(x, y) \in B$ )
- **und in der Behauptung** (Beispiel später)

### Beweis 2x.2:

leer

Sind A und B leer, dann ist auch C leer und ist gemäß Definition symmetrisch.

nicht leer

Ist C nicht leer, dann sei  $x \in C$  y für beliebige x und y.

Wegen  $C = A \cup B$  gilt  $x \in A$  oder  $x \in B$ .

$(x, y) \in A$

Falls  $x \in A$  gilt, dann ist auch  $y \in A$ , weil A symmetrisch ist.  
Wegen  $C = A \cup B$  ist auch  $y \in C$ .

$(x, y) \in B$

Falls  $x \in B$  gilt, dann ist auch  $y \in B$ , weil B symmetrisch ist.  
Wegen  $C = A \cup B$  ist auch  $y \in C$ .

Also folgt aus  $x \in C$  auch  $y \in C$ .

Deshalb ist auch C symmetrisch.

**qed.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 257

### Ziele:

Beweise durch Fallunterscheidung strukturieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Implikation als Behauptung

### Satz 2x.3:

Sei  $R$  eine zweistellige Relation über der Menge  $M$ .

Wenn  $a R b$  und  $b R a$  mit  $a \neq b$ , dann ist  $R$  weder eine Halbordnung (HO), noch eine strenge Halbordnung (sHO), noch eine totale Ordnung (tO).

Die Behauptung des Satzes hat die Form

$P$  impliziert ( $Q_1$  und  $Q_2$  und  $Q_3$ )  
 $(a R b \text{ und } b R a \text{ mit } a \neq b)$  impliziert (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

Hier kann man zwei Techniken zur Gliederung des Beweises anwenden:

- Behauptung  $P$  impliziert  $Q$ : füge  $P$  zu den Voraussetzungen und beweise  $Q$ .
- Behauptung  $Q_1$  und  $Q_2$  und ...: beweise jedes  $Q_i$  in einem einzelnen Fall.

Damit bekommt der Beweis 2x.3 folgende Struktur:

### Beweis 2x.3:

Wir nehmen an, es gelte  $P = (a R b \text{ und } b R a \text{ mit } a \neq b)$   
 Beweis aus Voraussetzung und  $P$  folgt nicht HO  
 Beweis aus Voraussetzung und  $P$  folgt nicht sHO  
 Beweis aus Voraussetzung und  $P$  folgt nicht tO  
 also aus  $P$  folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 258

### Ziele:

Zwei Techniken zur Beweisstrukturierung

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu



## Beweisstruktur ausfüllen

### **Beweis 2x.3:**

Wir nehmen an, es gelte  **$a R b$  und  $b R a$  mit  $a \neq b$**  für die zweistellige Relation  $R$  über der Menge  $M$ .

1. Dann verletzen  $a R b$  und  $b R a$  die Definition für Antisymmetrie. Also ist  $R$  **nicht eine Halbordnung**.
2. Da  $R$  gemäß (1) nicht antisymmetrisch ist, ist  $R$  auch **nicht eine totale Ordnung**.
3. Gemäß Satz 2x.4 (Mod-2.61) ist  $R$  **nicht eine strenge Halbordnung**.

Also folgt aus  **$a R b$  und  $b R a$  mit  $a \neq b$** , dass  $R$  **weder eine Halbordnung, noch eine strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung** ist. qed.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259

### **Ziele:**

Beweisstruktur ausfüllen

### **in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

**gültige Aussagen:**

$$R \in \text{Pow}(M \times M)$$

**Behauptungen:**

$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \\ \rightarrow (\neg H O \wedge \neg s H O \wedge \neg t O)$$

**Beweisstruktur:**

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259b

**Ziele:**

Beweis konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$$R \in \text{Pow}(M \times M)$$

$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \text{ (wg. Implik. in Beh.)}$$

### Behauptungen:

$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$$

$$\Rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$$

$$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259c

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$$R \in \text{Pow}(M \times M)$$

$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \text{ (wg. Implik. in Beh.)}$$

### Behauptungen:

~~$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$$~~

~~$$\Rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$$~~

~~$$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$$~~

$$\neg HO \text{ (3 Fälle wg. Konjunktion)}$$

$$\neg sHO$$

$$\neg tO$$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

**Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO**

**Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO**

**Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO**

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259d

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$$R \in \text{Pow}(M \times M)$$

$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b \text{ (wg. Implik. in Beh.)}$$

**R nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisym.)**

### Behauptungen:

~~$$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$$~~

~~$$\Rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$$~~

~~$$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$$~~

$$\neg HO \text{ (3 Fälle wg. Konjunktion)}$$

$$\neg sHO$$

$$\neg tO$$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259e

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$R \in \text{Pow}(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$  (wg. Implik. in Beh.)

$R$  nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisym.)

**$R$  ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)**

### Behauptungen:

~~$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$~~

~~$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$  (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

$\neg sHO$

$\neg tO$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht  $HO$

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht  $sHO$

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht  $tO$

also aus  $Z$  folgt (nicht  $HO$  und nicht  $sHO$  und nicht  $tO$ )

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259f

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$R \in \text{Pow}(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$  (wg. Implik. in Beh.)

$R$  nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisym.)

$R$  ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

**$R$  ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)**

### Behauptungen:

~~$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$~~

~~$\rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$~~

~~$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

~~$\neg HO$  (3 Fälle wg. Konjunktion)~~

~~$\neg sHO$~~

~~$\neg tO$~~

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und  $Z$  folgt nicht tO

also aus  $Z$  folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259g

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$R \in \text{Pow}(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$  (wg. Implik. in Beh.)

$R$  nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisym.)

$R$  ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

$R$  ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

### Behauptungen:

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$

$\rightarrow (\neg \text{HO} \wedge \neg \text{sHO} \wedge \neg \text{tO})$

$\neg \text{HO} \wedge \neg \text{sHO} \wedge \neg \text{tO}$

$\neg \text{HO}$  (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg \text{sHO}$

$\neg \text{tO}$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt  $\neg \text{HO} \wedge \neg \text{sHO} \wedge \neg \text{tO}$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259h

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.



## Konstruktionshilfen am Beispiel für Beweis 2x.3

### gültige Aussagen:

$R \in \text{Pow}(M \times M)$

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$  (wg. Implik. in Beh.)

$R$  nicht antisymmetrisch (wg. Def. antisym.)

$R$  ist nicht Halbordnung (wg. Def. HO)

$R$  ist nicht totale Ordnung (wg. Def. tO.)

nicht sHO wird separat bewiesen (2x.4)

### Behauptungen:

$a R b \wedge b R a \wedge a \neq b$

$\Rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

$\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

$\neg HO$  (3 Fälle wg. Konjunktion)

$\neg sHO$

$\neg tO$

### Beweisstruktur:

Wir nehmen an, es gelte  $Z = (a R b \wedge b R a \wedge a \neq b)$

~~Beweis aus Voraussetzung und Z folgt  $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$~~

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht HO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht sHO

Beweis aus Voraussetzung und Z folgt nicht tO

also aus Z folgt (nicht HO und nicht sHO und nicht tO)

abschließend  
Beweistext  
zusammensetzen

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 259i

### Ziele:

Beweis konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Behauptung vereinfachen, zerlegen, transformieren.
- Definitionen zu gültigen Aussagen hinzunehmen.
- Weitere gültige Aussagen ableiten.
- Beweis ausformulieren.

## Methode: Beweis durch Widerspruch

Ein Beweis durch Widerspruch führt häufig zum Ziel, wenn die Behauptung eine Negation ist:

**Satz:** Voraussetzung **V**. Behauptung **nicht P**.

Man nimmt dann die **nicht-negierte Behauptung mit als Voraussetzung** auf und leitet mit Schlussregeln daraus einen Widerspruch her, d.h. eine Aussage, die immer falsch ist, z. B. ( $x \in M$  und  $x \notin M$ ).

**Beweis:** Aus **V** und **P** folgt ein **Widerspruch**. Also war die Annahme **P** falsch.  
Also gilt **nicht P**. **qed.**

Häufig ist **nicht P** ein geeignetes Ziel für den Widerspruchsbeweis:

**Beweis:** Aus **V** und **P** folgt **nicht P**. Also gilt **(P und nicht P)**.  
Also war die Annahme **P** falsch, also gilt **nicht P**. **qed.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 260

### Ziele:

Methode Widerspruchsbeweis kennenlernen

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Beispiel für Beweis durch Widerspruch

### Satz 2x.4:

Sei  $R$  eine zweistellige Relationen über der Menge  $M$ .

Wenn  $a R b$  und  $b R a$  mit  $a \neq b$ , dann ist  $R$  **nicht eine strenge Halbordnung**.

### Beweis durch Widerspruch:

Sei  $a R b$  und  $b R a$  mit  $a \neq b$ .

Wir nehmen an, dass  $R$  **eine strenge Halbordnung** ist.

Dann muss  $R$  irreflexiv und transitiv sein.

Wegen der Transitivität folgt aus  $a R b$  und  $b R a$  auch  $a R a$  und  $b R b$ .

$a R a$  **verletzt** jedoch die Definition von **Irreflexivität**.

Also ist die Annahme, dass  $R$  eine **strenge Halbordnung** ist, falsch.

Also ist  $R$  **nicht eine strenge Halbordnung**.

qed.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261

### Ziele:

Methode Widerspruchsbeweis anwenden

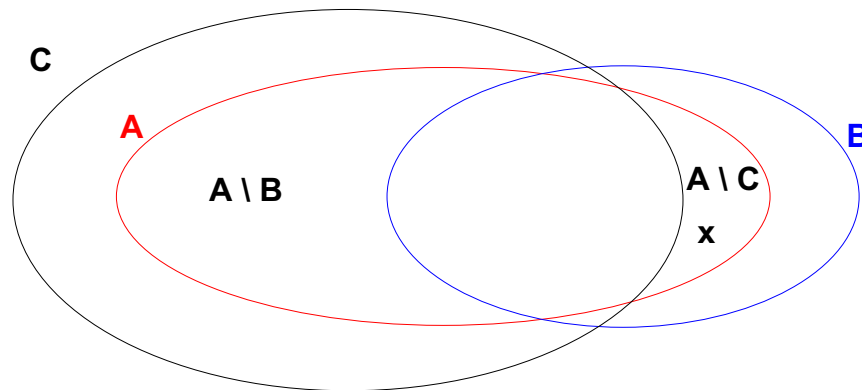
### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Satz 2x.5 zur Konstruktion eines Widerspruchsbeweises

**Satz 2x.5:**

**A, B, C seien Mengen mit  $A \setminus B \subseteq C$ . Dann gilt:**  
Aus  $x \in A \setminus C$  folgt  $x \in B$ .



### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261a

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen  
 $A \setminus B \subseteq C$

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261b

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

**gültige Aussagen:**

A, B, C Mengen  
 $A \setminus B \subseteq C$   
(es gibt ein  $x \in A \setminus C$ )

**Behauptungen:**

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$   
 $x \in B$

Implikation

**Beweisstruktur:**

Für die Mengen A, B, C gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .  
Es gibt ein  $x \in A \setminus C$ .  
Beweise  $x \in B$ .

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261c

**Ziele:**

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

### gültige Aussagen:

A, B, C Mengen  
 $A \setminus B \subseteq C$   
 (es gibt ein  $x \in A \setminus C$ )  
 $x \notin B$

### Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$   
 $x \in B$

Implikation  
 zeige Widerspruch  
 welchen?

### Beweisstruktur:

Für die Mengen A, B, C gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .

Es gibt ein  $x \in A \setminus C$ .

Beweise  $x \in B$ .

Wir nehmen an  $x \notin B$  und zeigen einen Widerspruch:

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261d

### Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

### gültige Aussagen:

$A, B, C$  Mengen

$A \setminus B \subseteq C$

(es gibt ein  $x \in A \setminus C$ )

$x \notin B$

$x \in A$

$x \notin C$

Def. \

### Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$

$x \in B$

Implikation  
zeige Widerspruch  
welchen?

### Beweisstruktur:

Für die Mengen  $A, B, C$  gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .

Es gibt ein  $x \in A \setminus C$ .

Beweise  $x \in B$ .

Wir nehmen an  $x \notin B$  und zeigen einen Widerspruch:

Wegen  $x \in A \setminus C$  gilt  $x \in A$  und  $x \notin C$ .

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261e

### Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.



## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

### gültige Aussagen:

$A, B, C$  Mengen  
 $A \setminus B \subseteq C$   
 (es gibt ein  $x \in A \setminus C$ )  
 $x \notin B$   
 $x \in A$   
 $x \notin C$   
 $x \in C$  Widerspruch!

Def. \

### Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$   
 $x \in B$

Implikation  
 zeige Widerspruch  
 welchen?

### Beweisstruktur:

Für die Mengen  $A, B, C$  gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .

Es gibt ein  $x \in A \setminus C$ .

Beweise  $x \in B$ .

Wir nehmen an  $x \notin B$  und zeigen einen Widerspruch:

Wegen  $x \in A \setminus C$  gilt  $x \in A$  und  $x \notin C$ .

Wegen  $A \setminus B \subseteq C$  und  $x \notin B$  und  $x \in A$  gilt  $x \in C$ .

Das ist ein Widerspruch.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261f

### Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Konstruktion eines Widerspruchsbeweises 2x.5

### gültige Aussagen:

$A, B, C$  Mengen  
 $A \setminus B \subseteq C$   
 (es gibt ein  $x \in A \setminus C$ )  
 $x \notin B$   
 $x \in A$   
 $x \notin C$   
 $x \in C$  Widerspruch!

Def. \

### Behauptungen:

$x \in A \setminus C \rightarrow x \in B$   
 $x \in B$

Implikation  
 zeige Widerspruch  
 welchen?

### Beweisstruktur:

Für die Mengen  $A, B, C$  gilt  $A \setminus B \subseteq C$ .

Es gibt ein  $x \in A \setminus C$ .

Beweise  $x \in B$ .

Wir nehmen an  $x \notin B$  und zeigen einen Widerspruch:

Wegen  $x \in A \setminus C$  gilt  $x \in A$  und  $x \notin C$ .

Wegen  $A \setminus B \subseteq C$  und  $x \notin B$  und  $x \in A$  gilt  $x \in C$ .

Das ist ein Widerspruch.

Also ist die Annahme  $x \notin B$  falsch; es gilt  $x \in B$ .

Also, für Mengen  $A, B, C$  mit  $A \setminus B \subseteq C$  gilt: Aus  $x \in A \setminus C$  folgt  $x \in B$ . **q.e.d.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 261i

### Ziele:

Widerspruchsbeweis schrittweise konstruieren

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ausgehen von Voraussetzungen und Behauptung.
- Implikation zerlegen.
- Behauptung negieren und zum Widerspruch führen
- Beweis ausformulieren.

## Unendlich viele Primzahlen

**Satz 2x.6: Es gibt unendlich viele Primzahlen.**

**Beweis durch Widerspruch (nach Euclid) 2x.6:**

Wir nehmen an, dass es **endlich viele Primzahlen** gibt, nämlich  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Sei  $m = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ .

$m$  ist nicht durch  $p_1$  teilbar, denn  $m$  dividiert durch  $p_1$  ergibt  $p_2 \dots p_n$  mit Rest 1. Aus demselben Grund ist  $m$  nicht durch  $p_2, \dots, p_n$  teilbar.

Wir verwenden nun die Tatsache, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, entweder **eine Primzahl** ist oder als **Produkt von Primzahlen** geschrieben werden kann.  $m$  ist größer als 1, also ist  $m$  entweder eine Primzahl oder  $m$  ist ein Produkt von Primzahlen.

Nehmen wir an,  $m$  ist eine Primzahl.  $m$  ist größer als jede Zahl  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Also haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das widerspricht der Annahme, dass  $p_1, p_2, \dots, p_n$  alle Primzahlen sind.

Nehmen wir nun an, dass  $m$  ein Produkt von Primzahlen ist. Sei  $q$  eine dieser Primzahlen. Dann ist  $q$  ein Teiler von  $m$ . Da  $p_1, p_2, \dots, p_n$  nicht Teiler von  $m$  sind, haben wir eine weitere Primzahl gefunden. Das ist wie oben ein **Widerspruch**.

Die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, hat zum **Widerspruch** geführt. Also gibt es unendlich viele Primzahlen. **qed.**

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 262

### Ziele:

Beweisstruktur verstehen

### in der Vorlesung:

- Voraussetzungen und Behauptung des Satzes identifizieren.
- Negation der Behauptung als Annahme.
- Tatsache über Primzahlen als weitere Voraussetzung verwenden.
- Oder in der Voraussetzung führt zu Fallunterscheidung.
- Jeder Fall wird einzeln zum Widerspruch geführt.

## Methode: Beweis durch Induktion

Beweise durch Induktion sind geeignet für Aussagen der Form

**Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $P(n)$ .**

**Ein Beweis durch Induktion hat folgende Struktur:**

**Induktionsanfang:** Beweis von  **$P(0)$** .

**Induktionsschritt:** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig aber fest.

Beweis von **Aus  $P(n)$  folgt  $P(n+1)$** .

**qed.**

Manchmal reicht im Beweis des Induktionsschrittes  $P(n)$  als Vorbedingung nicht aus. Dann kann man in der folgenden Variante  $P(0), P(1), \dots, P(n)$  verwenden:

**Variante** des Induktionsbeweises:

**Induktionsanfang:** Beweis von  **$P(0)$** .

**Induktionsschritt:** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig aber fest.

Beweis von **Aus  $[P(0), P(1), \dots, P(n)]$  folgt  $P(n+1)$** .

**qed.**

Zum Beweis von Aussagen der Form **Für alle  $n \in \mathbb{N}_0, n \geq k$  gilt  $P(n)$**  beginnt man im Induktionsanfang mit  **$P(k)$  statt  $P(0)$** .

Statt *Beweis durch Induktion* sagt man auch *Beweis durch vollständige Induktion*.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 263

### Ziele:

Beweismethode Induktion verstehen

### in der Vorlesung:

- Struktur erklären.

## Beispiel für Beweis durch Induktion

### Satz 2x.7:

Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .

### Beweis durch Induktion:

#### Induktionsanfang:

Für  $n = 0$  gilt  $2^0 = 1 = 2^1 - 1$ .

#### Induktionsschritt:

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  beliebig aber fest und

sei  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ . Dann ist

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 * 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

qed.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 264

### Ziele:

Beispiel zur Beweismethode Induktion

### in der Vorlesung:

- Beispiel nachvollziehen.

# Zusammenfassung

**Satzform: Voraussetzungen V. Behauptung B.**

**Beweismethoden:**

**Direkter Beweis:**

Aus **V** und bewiesenen Tatsachen mit Schlussregeln **B** nachweisen.

**Widerspruchsbeweis:**

*Nicht B* annehmen. Aus **V** und *nicht B* einen Widerspruch ableiten. Also gilt **B**.

**Induktionsbeweis** von Behauptung B = **Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt P (n):**

Induktionsanfang: Beweis von P (0),

Induktionsschritt: Beweis von Aus P (n) folgt P (n+1)

**Techniken:**

**Fallunterscheidung** bei **Sonderfällen**,  $V_1$  *oder*  $V_2$ ,  $B_1$  *und*  $B_2$

Wenn  $B = P$  *impliziert* Q, dann aus V *und* P die Behauptung Q folgern.

Viele weitere Strategien, Techniken und Beispiele im Buch von Velleman, z.B.

Wenn  $B = P$  *impliziert* Q, dann aus V *und nicht* Q die Behauptung *nicht* P folgern.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 265

**Ziele:**

Methoden und Techniken anwenden können

**in der Vorlesung:**

Zum Üben ermuntern.