4 Logik
4.1 Aussagenlogik

Kalkül zum **logischen Schließen**. Grundlagen: Aristoteles 384 - 322 v. Chr.

Aussagen: Sätze, die prinzipiell als wahr oder falsch angesehen werden können.
z. B.: „Es regnet.“, „Die Straße ist nass.“
aber „Dieser Satz ist falsch.“ ist in sich widersprüchlich, ist keine Aussage.

Junktoren verknüpfen Aussagen: „Es regnet nicht, **oder** die Straße ist nass.“

Aussagenlogische Formeln als Sätze einer formale Sprache:

z. B.	regen	$\rightarrow$	straßeNass	$\leftrightarrow$	$\neg$	regen	$\vee$	straßeNass
Belegung der Aussagen mit **Wahrheitswerten**:	f		w			f		w
Interpretation der Formel liefert Wahrheitswert:		w		w	w		w	

Formales Schließen im Gegensatz zur empirischen Beurteilung, z. B. ob „die Straße nass ist.“

Aus „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ **und** „Es regnet.“ **folgt** „Die Straße ist nass.“

Aussagen in der **Spezifikation**, in der **Modellierung** von Aufgaben

Vorschau auf Begriffe

- **Aussagenlogische Formeln** definiert durch **Signatur der booleschen Algebra**
- **Belegung von Variablen** mit Wahrheitswerten
- **Interpretation** aussagenlogischer Formeln
- **Gesetze der booleschen Algebra** zur Umformung von Formeln
- **erfüllbare** und **allgemeingültige** Formeln
- **logischer Schluss:** Folgerung aus einigen Annahmen

Beispiel: Aussagenlogik in der Spezifikation

Unfall durch fehlerhafte Spezifikation:

Airbus A320, Warschau (1993). Der zuständige Rechner blockiert bei der Landung die Aktivierung von Schubumkehr und Störklappen, wodurch das Flugzeug über das Landebahnende hinausschießt. Es herrschen starker Wind von schräg hinten und Aquaplaning auf der Landebahn.

Beabsichtigte Spezifikation der Störklappenfreigabe:

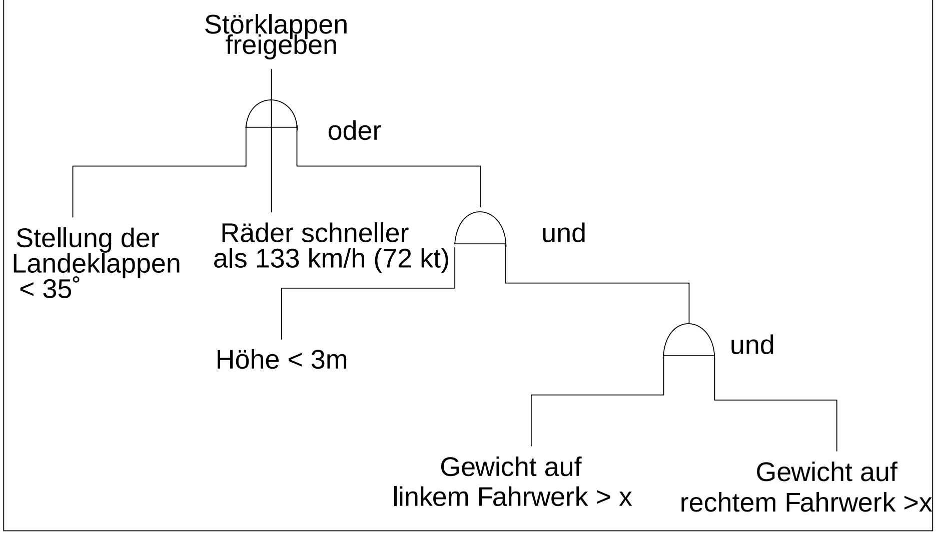
Die Störklappen dürfen benutzt werden

- im Reise- und Sinkflug (Bremswirkung)
- nach der Landung (Vernichtung des Auftriebes und Bremswirkung)

Sie dürfen nicht benutzt werden

- im Endanflug (gefährlicher Auftriebsverlust)

Tatsächliche Spezifikation der Störklappenfreigabe:



Aussagenlogische Formeln

Aussagenlogische Formeln sind korrekte Terme mit Variablen zur Signatur der booleschen Algebra:

false:		-> Bool	falsch, f
true:		-> Bool	wahr, w
$\wedge$:	Bool x Bool	-> Bool	**Konjunktion**
$\vee$:	Bool x Bool	-> Bool	**Disjunktion**
$\neg$:	Bool	-> Bool	**Negation**

Erweiterung:

$\rightarrow$:	Bool x Bool	-> Bool	**Implikation** $p \rightarrow q$ für $\neg p \vee q$
$\leftrightarrow$:	Bool x Bool	-> Bool	**Äquivalenz** $p \leftrightarrow q$ für $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Operatoren (**Junktoren**) in **fallender Präzedenz**: $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

Variable, sowie false und true (Konstante) sind **atomare Aussagen**,
die übrigen Formeln sind **zusammengesetzt**.

Für **Variable** schreiben wir meist kleine Buchstaben p, q, ...
für **allgemeine Formeln** große Buchstaben F, G, H, ...

Die Definition der **Struktur** der Formeln heißt **Syntax der Aussagenlogik**.

Interpretation aussagenlogischer Formeln

Eine **passende Belegung** ordnet allen Variablen, die in einer Menge von Formeln F vorkommen, jeweils einen Wahrheitswert w oder f (für wahr oder falsch) zu.
Die Belegung kann als Substitution angegeben werden, z.B. σ = [p / w, q / f].

Eine **Interpretation** $\mathfrak{I}_\sigma$ einer aussagenlogischen Formel F bildet F auf einen Wahrheitswert ab:

- Für **Variable** ist die Interpretation $\mathfrak{I}_\sigma$ durch die **Belegung** σ definiert.
- Für **zusammengesetzte Formeln** wird sie durch folgende **Wahrheitstafeln** erweitert:

$\mathfrak{I}$(false)=f
$\mathfrak{I}$(true)=w

$\mathfrak{I}$(F)	$\mathfrak{I}$(¬F)
w	f
f	w

$\mathfrak{I}$(F)	$\mathfrak{I}$(G)	$\mathfrak{I}$(F∧G)	$\mathfrak{I}$(F∨G)	$\mathfrak{I}$(F→ G)	$\mathfrak{I}$(F↔G)
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Eine Interpretation $\mathfrak{I}_\sigma$ mit einer Belegung σ für eine Formel F bestimmt einen **Wahrheitswert der Formel F:** $\mathfrak{I}_\sigma$(F)

Wenn $\mathfrak{I}_\sigma$(F) = w gilt, heißt $\mathfrak{I}_\sigma$ auch ein **Modell der Formel F.**

Vorsicht beim Formalisieren umgangssprachlicher Aussagen

Vorsicht bei **Implikationen**; mit Belegungen prüfen, was gemeint ist:

1. **Wenn** es regnet, benutze ich den Schirm. — regnet → schirm
2. Ich benutze den Schirm, **wenn** es regnet. — regnet → schirm
3. Ich benutze den Schirm, **nur wenn** es regnet. — schirm → regnet

„Oder“ kann fast immer in das **nicht-ausschließende** ∨ übersetzt werden:

4. Hast Du einen Euro oder zwei Fünfziger? — euro ∨ zwei50er
5. Morgen fahre ich mit dem Zug oder mit dem Auto nach Berlin. — zug ∨ auto
6. x ist kleiner y oder x ist gleich y. — x<y ∨ x=y
7. Der Händler gibt Rabatt oder ein kostenloses Autoradio. — ¬ (rabatt ↔ radio)

Aussagen sind häufig **kontext-abhängig**:

8. Weil ich die GP-Klausur nicht bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin teil. — ¬ gp-k1 ∧ gp-k2
9. Weil ich die Modellierungsklausur bestanden habe, nehme ich am zweiten Termin nicht teil. — mod-k1 ∧ ¬ mod-k2

Klammern sind meist nur aus dem Kontext erkennbar:

10. Sie wollten nicht verlieren oder unentschieden spielen. — ¬ (verlieren ∨ unentschieden)

Erfüllbarkeit von Formeln

Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es
eine Interpretation $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gibt, so dass gilt $\Im_\sigma$ (F) = w,
sonst ist sie **widerspruchsvoll** (**unerfüllbar**), d.h.
für alle Interpretationen $\Im_\sigma$ mit einer Belegung σ gilt $\Im_\sigma$ (F) = f.

z. B. $p \wedge q$ ist erfüllbar; $p \wedge \neg p$ ist widerspruchsvoll.

Eine Formel F heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn
für alle ihre Interpretationen $\Im_\sigma$ (F) = w gilt.

z. B. $p \vee \neg p$.

Eine Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg$ F widerspruchsvoll ist.

allgemein-gültig	erfüllbar aber nicht allgemeingültig	widerspruchs-voll
F		$\neg$ F

Gesetze der booleschen Algebra

Zwei Formeln F, G sind **logisch äquivalent**, **F $\equiv$ G**,
wenn sie **für alle Interpretationen** $\Im$ dasselbe Ergebnis haben: $\Im$(F) = $\Im$(G)

Für alle aussagenlogischen Fomeln X, Y, Z gelten folgende **logische Äquivalenzen**:

$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$	$(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$	Assoziativität
$X \wedge Y \equiv Y \wedge X$	$X \vee Y \equiv Y \vee X$	Kommutativität
$X \wedge X \equiv X$	$X \vee X \equiv X$	Idempotenz
$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	Distributivität
$X \vee (X \wedge Y) \equiv X$	$X \wedge (X \vee Y) \equiv X$	Absorption
$X \wedge \text{false} \equiv \text{false}$ $X \wedge \text{true} \equiv X$	$X \vee \text{false} \equiv X$ $X \vee \text{true} \equiv \text{true}$	Neutrale Elemente
$X \wedge \neg X \equiv \text{false}$	$X \vee \neg X \equiv \text{true}$	Komplement
$\neg \neg X \equiv X$		Involution
$\neg (X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$	$\neg (X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$	De Morgan

Umformen mit Gesetzen der booleschen Algebra

Beispiel:

$(A \vee \underline{\neg (B \wedge A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	De Morgan
$(A \vee \underline{(\neg B \vee \neg A)}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{A \vee (\neg A \vee \neg B})) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Assoziativität
$((\underline{A \vee \neg A}) \vee \neg B) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Komplement
$(\underline{true \vee \neg B}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{\neg B \vee true}) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv$	Neutrale Elemente
$\underline{true \wedge (C \vee (D \vee C))} \equiv$	Kommutativität
$\underline{(C \vee (D \vee C)) \wedge true} \equiv$	Neutrale Elemente
$(C \vee (\underline{D \vee C})) \equiv$	Kommutativität
$(\underline{C \vee (C \vee D})) \equiv$	Assoziativität
$((\underline{C \vee C}) \vee D) \equiv$	Idempotenz
$C \vee D$	

Logischer Schluss

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Formeln und F eine Formel.
Wenn für **alle Interpretationen** $\Im$, die alle Formeln in $\mathcal{A}$ erfüllen, auch $\Im$ (F) gilt, dann sagen wir

„F folgt semantisch aus $\mathcal{A}$“ **$\mathcal{A}$ |= F**

$\mathcal{A}$ |= F heißt auch **logischer Schluss**,
$\mathcal{A}$ **Annahme** oder Antezedent, F **Folgerung** oder Konsequenz.

Die **Korrektheit eines logischen Schlusses** $\mathcal{A}$ |= F mit $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ kann man prüfen:

a. durch Prüfen aller Interpretationen, die alle Formeln in A erfüllen

b. durch Wiederspruchsbeweis: $\mathbf{A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge \neg F}$ muss **widerspruchsvoll** sein.

Beweise werden aus logischen Schlüssen aufgebaut.

Beispiel:

U: Wenn alle Menschen gleich sind, gibt es keine Privilegien.

V: Es gibt Privilegien.

W: Nicht alle Menschen sind gleich.

nachweisen: **{ U, V } |= W** ist ein **korrekter logischer Schluss**.