4.2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen**, **Variablen**, **Junktoren.**
Zusätzliche Konzepte:

- A = (τ, Σ) ist die so genannte **Termalgebra** (mit Variablen, ohne Axiome) mit Signatur $\Sigma = (\{T\}, F)$, wobei T die Sorte „Term" ist und alle Operationen $f \in F$ von der Form $f: T^n \rightarrow T$ sind. **Terme** sind die korrekten Terme bzgl. dieser Termalgebra.
- **n-stellige Prädikate** sind Operationen $P: T^n \rightarrow BOOL$. In einer Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen,
  z. B. „x ist eine Katze" bzw. als Formel: istKatze(x)
  teilt(a,b), größterGemeinsamerTeiler(a, b, g)
- **Quantoren** „**für alle x gilt** α" und „**es gibt ein x, so dass** α **gilt**"
  in Symbolen: $\forall \mathbf{x} \alpha$ bzw. $\exists \mathbf{x} \alpha$
  Beispiel: $\forall$x (esIstNacht $\wedge$ istKatze(x) $\rightarrow$ istGrau(x));
  in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau."

Schon **zur Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte **der Prädikatenlogik**,

z. B. größter gemeinsamer Teiler:

gegeben: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$;
gesucht: größter gemeinsamer Teiler g von a und b, d. h.
teilt(g, a) $\wedge$ teilt(g, b) $\wedge$ ($\forall$h (teilt(h, a) $\wedge$ teilt(h, b) $\rightarrow$ h $\leq$ g))

Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik
  Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, widerspruchsvoll**:
  wie in der Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in der Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

Prädikatenlogische Formeln

Prädikatenlogische Formeln (PL-Formeln) werden induktiv wie folgt definiert:

1. **Primformeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form **P (t_1, ..., t_n) oder**
   Gleichungen in der Form **$t_1 = t_2$.**
   Dabei ist **P** ein n-stelliges Prädikatsymbol und die **t_i** sind Terme der Termalgebra.
   0-stellige Prädikatsymbole entsprechen den atomaren **Aussagen der Aussagenlogik.**
2. **logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\neg\alpha \quad \alpha \wedge \beta \quad \alpha \vee \beta$
   sowie $\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \leftrightarrow \beta$ **als Abkürzungen**
   mit prädikatenlogischen Formeln α und β
3. der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$ bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\forall \mathbf{x}\, \alpha$ und $\exists \mathbf{x}\, \alpha$
   mit der prädikatenlogischen Formel α; sie definieren die Variable x

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

Quantoren haben die gleiche **Präzedenz** wie $\neg$, also höhere als $\wedge$.

Beispiele:

teilt(g, a) $\wedge$ teilt(g, b) $\wedge$ ($\forall$h (teilt(h, a) $\wedge$ teilt(h, b) $\rightarrow \leq$ (h, g))   (siehe Folie 4.21)

$\forall$x $\forall$y $\forall$z ((R(x, y) $\wedge$ R(x,z)) $\rightarrow$ y = z)   „R ist eine Funktion“

Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur Σ wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe**: **Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**. Nur solche Variablen dürfen quantifiziert werden.

Vorkommen von Variablen

Wir sagen: (Eine Variable mit Namen) **x kommt in einer PL-Formel α vor**, wenn sie in einer Primformel und dort in einem Term vorkommt.

Für eine PL-Formel der Form $\forall x\ \alpha$ oder $\exists x\ \alpha$ ist α der **Wirkungsbereich (für x) des Quantors**. x ist der **Name der Variablen des Quantors**.

Beispiel:

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \vee \quad \exists y\ (P(y) \wedge \quad \forall z\ R(y, z))$$

Quantoren mit ihrenWirkungsbereichen

Anmerkungen:

- Eine Variable hat einen Namen; **mehrere Variable können den gleichen Namen haben**.
- Ein Quantor definiert eine Variable, z. B. $\forall x\ \alpha$ definiert (eine Variable mit Namen) x.
  Ihr **Name kann im Wirkungsbereich (auch mehrfach) vorkommen**.
- **Wirkungsbereiche** von Quantoren können **geschachtelt** sein,
  sogar mit (verschiedenen) Variablen, die **dieselben Namen** haben.

Freie und gebundene Variable

(Ein Vorkommen von) **x** in einer Formel α **heißt frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich für x eines Quantors liegt.

Ein **Quantor $\forall$x α bzw. $\exists$x α bindet** alle (Vorkommen von) x, die frei sind in α. (Das Vorkommen von) x heißt dann **gebunden**.

Beispiel: Formel α

$$R(y) \wedge \exists y\ (P(y, x) \vee Q(y, z))$$

freie Vorkommen

gebundene Vorkommen

In α gibt es 3 freie Variable; sie haben die Namen y, x, z.

2 Variable haben den Namen y;
eine kommt frei vor in R(y), die andere kommt 2 mal gebunden in α vor.

Umbenennung von Variablen

In einer Formel können mehrere Vorkommen von Quantoren **verschiedene Variable mit gleichem Namen** einführen und in ihrem Wirkungsbereich binden:

Beispiele:

$$\forall y\ (\exists x\ R(x, y) \wedge \exists x\ Q(x, y)) \qquad \forall x\ \forall y\ (P(x, y) \wedge \exists x\ R(x, y))$$

Umbenennung: In einer Formel kann man **alle (gebundenen) Vorkommen des Namens x der Variablen eines Quantors in dessen Wirkungsbereich durch einen neuen Namen z ersetzen**, der sonst nicht in der Formel vorkommt. Die Bedeutung der Formel, (genauer: semantische Aussagen über sie), ändert sich dadurch nicht.

Beispiele von oben:

$$\forall y\ (\exists x\ R(x, y) \wedge \exists z\ Q(z, y)) \qquad \forall x\ \forall y\ (P(x, y) \wedge \exists z\ R(z, y))$$

Damit kann man erreichen, dass **verschiedene Variable verschiedene Namen** haben.
Wir sagen dann: Die Variablen der Formel sind **konsistent umbenannt**.
Formeln, in denen **alle Variablen verschiedene Namen** haben sind meist **besser lesbar**.
Manche **Definitionen sind einfacher** für konsistent umbenannte Formeln.

Interpretation zu prädikatenlogischer Formel

Einer prädikatenlogischen Formel α wird durch eine **Interpretation** $\mathfrak{I}\ (\alpha)$ **Bedeutung zugeordnet,** sodass man ihren Wahrheitswert (w oder f) berechnen kann.

Eine **Interpretation** $\mathfrak{I}$ wird bestimmt durch

- einen **Individuenbereich U,** der nicht leer ist (auch Universum genannt). Aus U stammen die Werte der Variablen und Terme.
- eine **Abbildung der Funktions- und Prädikatsymbole** auf dazu passende konkrete Funktionen und Relationen, notiert als z. B. $\mathfrak{I}$(h), $\mathfrak{I}$(P)
- eine **Belegung der freien Variablen mit Werten aus U**, notiert z. B. $\mathfrak{I}$(x).
- die Interpretation der Junktoren und Quantoren (definiert auf Folie 4.31)

Bemerkungen:

- In der Prädikatenlogik enthält der **Individuenbereich U alle Individuen - auch verschiedenartige** - die für die Interpretation benötigt werden. Er ist **nicht in Wertebereiche gleichartiger Individuen** strukturiert (wie in Kapitel 2).
- **Der Sorte T** wird deshalb **der ganze Individuenbereich U** zugeordnet.
- Eine **Interpretation** wird immer **passend zu einer Menge prädikatenlogischer Formeln** definiert. Nur darin vorkommende Funktionen, Prädikate und Variable interessieren.

Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel $\alpha = (\forall x\ P(x, h(x))) \wedge Q(g(a, z))$ ist folgendes $\Im$ eine passende Interpretation:

$U := \mathbb{N}$

$\Im(P) := \{ (m, n) \mid m, n \in U$ und $m < n \}$

$\Im(Q) := \{ n \mid n \in U$ und n ist Primzahl $\}$

$\Im(h)$ ist die Nachfolgerfunktion auf U, also $\Im(h)(n) = n + 1$

$\Im(g)$ ist die Additionsfunktion auf U also $\Im(g)(m, n) = m + n$

$\Im(a) := 2$ (a ist eine Konstante, d.h. eine 0-stellige Funktion, $2 \in U$)

$\Im(z) := n$ (z ist eine freie Variable, $n \in U$)

Bemerkungen:

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von $\Im$ zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten (Folie 4.31).

Das Beispiel stammt aus
U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei α eine prädikatenlogische Formel und $\Im$ eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert $\Im(\alpha)$,** indem man $\Im$ **rekursiv anwendet** auf die Teile von α:

- die **Prädikatsymbole und deren Terme**,
- die **Funktionssymbole und deren Terme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

Interpretation von PL-Formeln (vollständige Definition)

Die Interpretation der Symbole wird auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind, erweitert:

Für jeden Term **h(t$_1$, ..., t$_n$)** wird definiert: $\Im$(h (t$_1$, ..., t$_n$)) = $\Im$(h)($\Im$(t$_1$), ..., $\Im$(t$_n$)).

Für Formeln gilt (Definition durch Induktion über den Aufbau der prädikatenlogischen Formeln):

1. $\Im(P\ (t_1, ..., t_n)) = w$ genau dann, wenn $(\Im(t_1), ..., \Im(t_n)) \in \Im(P)$
2. $\Im(t_1 = t_2) = w$ genau dann, wenn $\Im(t_1) = \Im(t_2)$
3. $\Im(\neg\alpha) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = f$
4. $\Im(\alpha \wedge \beta) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = w$ **und** $\Im(\beta) = w$
5. $\Im(\alpha \vee \beta) = w$ genau dann, wenn $\Im(\alpha) = w$ **oder** $\Im(\beta) = w$
6. $\Im(\forall x\alpha) = w$ genau dann, wenn **für jeden Wert d** $\in$ **U** gilt $\Im_{[x/d]}(\alpha) = w$
7. $\Im(\exists x\alpha) = w$ genau dann, wenn es **einen Wert d** $\in$ **U gibt** mit $\Im_{[x/d]}(\alpha) = w$

Dabei ordnet $\Im_{[x/d]}(\alpha)$ in α der Variablen **x** den Wert **d** zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretation $\Im$ überein.

Beispiel für Interpretation einer Formel

Formel α:

$R \wedge \forall x\ \forall y\ P\ (x, y)$

Interpretation $\Im$:

$U = \{ 1, 2, 3 \}$

$\Im(P) = \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$

$\Im(R) = w$

Interpretation $\Im$ rekursiv gemäß Mod-4.31 angewandt:

Nr.:		$\Im(R \wedge \forall x\ \forall y\ P\ (x, y))$
4	=	$\Im(R)$ und $\Im(\forall x\ \forall y\ P\ (x, y))$
$\Im$,6,6	=	w und für jedes d, e $\in$ U gilt $\Im_{[x/d,\ y/e]}(P\ (x, y))$
1	=	w und für jedes d, e $\in$ U gilt $(\Im_{[x/d,\ y/e]}(x), \Im_{[x/d,\ y/e]}(y)) \in \Im_{[x/d,\ y/e]}(P)$
$\Im$	=	w und für jedes d, e $\in$ { 1, 2, 3 } gilt (d, e) $\in$ { (a, b) | a + b < 10 }
	=	w und w
	=	w

Elementare Interpretationen

Wir betrachten für die Beispiele A bis G eine Interpretation $\Im$ mit Individuenbereich U = $\mathbb{N}$.

a. freie Variable: $\Im$ (u) = 1 $\in$ U, $\Im$ (v) = 2 $\in$ U (bestimmte Elemente von U)

b. 0-stellige Prädikate: $\Im$ (A) = w oder $\Im$ (A) = f (boolesche Variable)

c. 1-stellige Prädikate: $\Im$ (P) = M := $\{1, 2, 3\} \subseteq$ U (Teilmenge von U)

d. 2-stellige Prädikate: $\Im$ (Q) = R := {(1, 2), (2, 2)} $\subseteq$ U $\times$ U (Relation auf U)

A. $\Im$ (P(u)) = w gdw $\Im$ (u) $\in$ $\Im$ (P), d. h. 1 $\in$ M

B. $\Im$ (Q(u, v)) = w gdw ($\Im$ (u), $\Im$ (v)) $\in$ $\Im$ (Q), d. h. (1, 2) $\in$ R

C. $\Im$ ($\forall$x P(x)) = w gdw (Für alle d $\in$ U gilt: d $\in$ M) = f, d. h. M $\neq$ U

D. $\Im$ ($\exists$x P(x)) = w gdw Es existiert d $\in$ U mit d $\in$ M, M $\neq \emptyset$

E. $\Im$ ($\forall$x Q(x, x)) = w gdw (Für alle d $\in$ U gilt: (d, d) $\in$ R) = f, d. h. R ist nicht reflexiv

F. $\Im$ ($\exists$x Q(x, x)) = w gdw Es gibt ein d $\in$ U mit (d, d) $\in$ R, d. h. R ist nicht irreflexiv

G. $\Im$ ($\forall$x $\forall$y (Q(x,y) $\wedge$ Q(y, x) $\rightarrow$ x = y)) = w
gdw Für alle d, e $\in$ U gilt: aus (d, e) $\in$ R und (e, d) $\in$ R folgt d = e, d. h. R ist antisymmetrisch

Beschränkung von Wertebereichen

In der **Prädikatenlogik** kann die **Interpretation von Variablen** Werte aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen (im Unterschied zu einem **Wertebereich**).
Deshalb muss eine **Einschränkung explizit als Relation** formuliert werden.

Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation $\rightarrow$:
„Für alle m $\in$ U gilt: **aus** m $\in$ M **folgt** Q(m, n)“ oder abgekürzt „$\forall$m $\in$ M: Q(m, n)“

als PL-Formel: $\forall$x (P(x) $\rightarrow$ Q(x, y))

	ausführliche Notation:	abkürzende Notation:
Beispiele:	Für alle i $\in$ U gilt: aus i $\in$ {1, 2, 3, 4} folgt $b_i = a_i^2$	$\forall$i $\in$ {1, 2, 3, 4}: $b_i = a_i^2$
	Für alle k $\in$ U gilt: aus k $\in$ $\mathbb{N}$ folgt a + k $\geq$ a	$\forall$k $\in$ $\mathbb{N}$: a + k $\geq$ a

Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion $\wedge$:
„Es gibt ein m $\in$ U, sodass m $\in$ M **und** Q(m, n) “ oder abgekürzt „$\exists$m $\in$ M: Q(m, n)“

PL-Formel: $\exists$x (P(x) $\wedge$ Q(x, y))

Beispiele:	Es gibt ein k $\in$ U, sodass k $\in$ $\mathbb{N}$ **und** a * k = b	$\exists$k $\in$ $\mathbb{N}$: a * k = b
	Es gibt ein i $\in$ U, sodass i $\in$ {1, 2, 3, 4} **und** a_i = x	$\exists$i $\in$ {1, 2, 3, 4}: a_i = x

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (1)

Die Variablen in Gleichungen konkreter Algebren sind durch Allquantoren gebunden:

Axiom K3: pop (push (k, x)) –>k (in der abstrakten Keller-Algebra)

Gleichung: $\forall a \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}$: remove (append (a, n)) = a (konkrete Algebra)

PL-Formel: $\forall k\ \forall x\ (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h\ (g\ (k, x)) = k)$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$, $\Im(S) = \mathbb{N}$, $\Im(P) = \mathbb{N}^*$

$\Im(h)$ = remove: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$,

$\Im(g)$ = append: $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

Es gilt: $\Im(\forall k\ \forall x\ (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(\ g\ (k, x)) = k))) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \Im_{[k/a,\ x/n]}\ (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h\ (g\ (k, x)) = k) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$: Aus $a \in \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt: remove (append (a, n)) = a

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$: remove (append (a, n))= a

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (2)

Aus der Analysis:

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$, heißt Nullfolge, wenn gilt

$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n \in \mathbb{N}$ mit $n_0 < n : |\ a_n\ | < \varepsilon$

Dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!

PL-Formel α: $\forall x(P_1(x) \rightarrow \exists y(P_2(y) \wedge \forall z(P_2(z) \wedge Q(y, z)) \rightarrow Q(h(z), x))))$

Interpretation: $U = \mathbb{R}$, $\Im(P_1) = \mathbb{R}^+$, $\Im(P_2) = \mathbb{N}$,

$\Im(Q) = \{\ (r, s) \mid (r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ und $r < s\ \}$,

$\Im(h) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Im(h)\ (i) = |\ a_i\ |$

Es gilt: $\Im(\alpha) = w$ gdw a_n ist eine Nullfolge

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (3)

Aus der Informatik:

Eine Folge $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^{\mathbf{k}}$ heißt monoton wachsend, wenn gilt

$\forall\, i \in \{1, ..., k\}: \forall\, j \in \{1, ..., k\}$ mit $i \leq j$ gilt $a_{\mathbf{i}} \leq a_{\mathbf{j}}$

PL-Formel β : $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow Q(h(x), h(y))))$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^k \cup \{1, ..., k\}$, $\mathfrak{I}(P) = \{1, ..., k\}$,

$\mathfrak{I}(Q) = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

$\mathfrak{I}(h) : \{1, ..., k\} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathfrak{I}(h)(i) = a_i$

Es gilt: $\mathfrak{I}(\beta) = w$ gdw a_n ist monoton wachsend

Was bedeutet $\mathfrak{I}(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (Q(h(x), h(y)) \wedge (h(x) = h(y) \rightarrow Q(x, y))))) = w$

mit $\mathfrak{I}(x) = i$, $i \in \{1, ..., k\}$, bei sonst unveränderter Interpretation?

Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

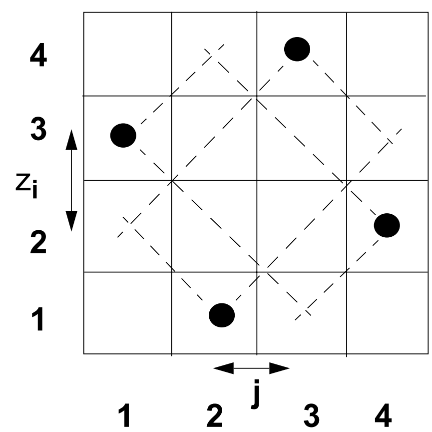
gegeben:
Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ eines $n * n$ Schachbrettes

gesucht:
Menge P zulässiger Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:

Sei Index := {1, ..., n}

$P := \{ p \mid p = (z_1, ..., z_n) \in \text{Index}^n \wedge \text{zulässig}(p) \}$

$z_{\mathbf{i}}$ gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte i an.



Dabei bedeutet
zulässig (p): $\forall\, i \in \text{Index}: \forall\, j \in \text{Index}: i \neq j \rightarrow z_{\mathbf{i}} \neq z_{\mathbf{j}} \wedge |\, z_{\mathbf{i}} - z_{\mathbf{j}} \,| \neq |\, i - j \,|$

Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.
Aber: Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.
Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**" und „**allgemeingültig**" für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation $\Im(\alpha) = w$ gilt, heißt $\Im$ auch ein **Modell der Formel α.**
- Eine Formel α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\Im$ gibt, so dass gilt $\Im(\alpha) = w$, sonst ist sie **widerspruchsvoll**.
- Eine Formel α heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von α gilt $\Im(\alpha) = w$, sonst ist sie **falsifizierbar**.
- Eine Formel α ist genau dann **allgemeingültig, wenn $\neg\alpha$ widerspruchsvoll** ist.
- Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen: $\alpha \equiv \beta$, wenn sie für alle Interpretationen $\Im$ dasselbe Ergebnis haben: $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$
- Sei F eine Menge von Formeln und α eine Formel.
  Wenn für **alle Interpretationen** $\Im$, die alle Formeln in F erfüllen, auch $\Im(\alpha)$ gilt, dann sagen wir **„α folgt semantisch aus F"** bzw. $F \models \alpha$;
  $F \models \alpha$ heißt auch **logischer Schluss**.

Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien α und β beliebige prädikatenlogische Formel. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

1. **Negation:**

   $\neg\forall x\ \alpha \equiv \exists x\ \neg\alpha$ $\qquad$ $\neg\exists x\ \alpha \equiv \forall x\ \neg\alpha$

2. **Wirkungsbereich der Quantoren verändern:**
   Falls x in β nicht frei vorkommt, gilt

   $(\forall x\ \alpha) \wedge \beta \equiv \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\forall x\ \alpha) \vee \beta \equiv \forall x\ (\alpha \vee \beta)$

   $(\exists x\ \alpha) \wedge \beta \equiv \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha) \vee \beta \equiv \exists x\ (\alpha \vee \beta)$

   $\beta \equiv \exists x\ \beta$ $\qquad$ $\beta \equiv \forall x\ \beta$

3. **Quantoren zusammenfassen:**

   $(\forall x\ \alpha \wedge \forall x\ \beta) \equiv \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha \vee \exists x\ \beta) \equiv \exists x\ (\alpha \vee \beta)$

   Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:
   $(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta) \not\equiv \forall x\ (\alpha \vee \beta)$ $\qquad$ $(\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta) \not\equiv \exists x\ (\alpha \wedge \beta)$

4. **Quantoren vertauschen:**

   $\forall x\ \forall y\ \alpha \equiv \forall y\ \forall x\ \alpha$ $\qquad$ $\exists x\ \exists y\ \alpha \equiv \exists y\ \exists x\ \alpha$

Beispiele für Äquivalenzen

1. Negation: **formal**

		formal
	Alle haben den Schuss gehört.	$\forall x$ gehört(x)
negiert:	Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\exists x \neg$ gehört(x)
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg$ gehört(x)

$\neg\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10$

gdw $\neg\forall i\ (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$

gdw $\exists i\ \neg(\neg\, i \in \text{Ind} \vee a_i < 10)$

gdw $\exists i\ (\, i \in \text{Ind} \wedge \neg\, a_i < 10)$

gdw $\exists i \in \text{Ind}: a_i \geq 10$

$(\exists\, x\ P(x)) \rightarrow P(y)$

$\equiv\ \neg(\exists\, x\ P(x)) \vee P(y)$

$\equiv\ (\forall\, x\ \neg P(x)) \vee P(y)$

$\equiv\ \forall\, x\ (\neg P(x) \vee P(y))$

$\equiv\ \forall\, x\ (P(x) \rightarrow P(y))$

2. Zusammenfassung von Quantoren:

Äquivalent:

$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10)\ \wedge\ (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$ gdw $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$

Nicht äquivalent, vielmehr gilt nur:
Aus $(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10)\ \vee\ (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$ **folgt** $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$

Beispiel für Umformungen

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

	$\underline{\neg(\exists x\ P(x, y) \vee \forall z\ Q(z))} \wedge \exists u\ f(a, u) = a$	DeMorgan
$\equiv$	$(\underline{\neg\exists x\ P(x, y)} \wedge \underline{\neg\forall z\ Q(z)}) \wedge \exists u\ f(a, u) = a$	Negation von Quantorformeln (x, z)
$\equiv$	$(\forall x\ \neg P(x, y) \wedge \exists z\ \neg Q(z))\ \underline{\wedge}\ \exists u\ f(a, u) = a$	Kommutativität
$\equiv$	$\underline{\exists u\ f(a, u) = a} \wedge (\underline{\forall x\ \neg P(x, y)} \wedge \exists z\ \neg Q(z))$	Wirkungsbereiche ausweiten (u, x)
$\equiv$	$\exists u\ (f(a, u) = a\ \underline{\wedge}\ \forall x\ (\neg P(x, y)\ \underline{\wedge}\ \exists z\ \neg Q(z)))$	Kommutativität (2 mal)
$\equiv$	$\exists u\ (\forall x\ (\underline{\exists z\ \neg Q(z)} \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereich ausweiten (z)
$\equiv$	$\exists u\ (\underline{\forall x\ \exists z\ (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y))} \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereiche ausweiten (x, z)
$\equiv$	$\underline{\boldsymbol{\exists u\ \forall x\ \exists z}}\ (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge f(a, u) = a)$	

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

Normalformen

- **Definition:** Eine PL-Formel α ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen in α unmittelbar vor einer Primformel steht und α die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ nicht enthält.

- **Definition:** Eine PL-Formel α ist in **pränexer Normalform (PNF)** genau dann, wenn sie von der Form $Q_1x_1\ Q_2x_2\ \ldots\ Q_nx_n\ \beta$ ist, wobei Q_i Quantoren sind und β keine Quantoren enthält.

- **Satz:** Zu jeder PL-Formel gibt es **logisch äquivalente Formeln** in Negationsnormalform bzw. in pränexer Normalform.

Erzeugung der PNF

Die Erzeugung der pränexen Normalform geschieht in zwei Schritten:

1. Konsistente **Umbenennung** der Variablen (siehe Folie 4.27)
2. Quantoren nach links mit Hilfe der folgenden **Ersetzungsregeln** (Äquivalenzen):
   a. Ersetze $(\forall x\alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ (wegen (1) kommt x nicht frei in β vor)
   b. Ersetze $(\exists x\alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
   c. Ersetze $(\forall x\alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$
   d. Ersetze $(\exists x\alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$
   e. Ersetze $\neg\forall x\alpha$ durch $\exists x\neg\alpha$
   f. Ersetze $\neg\exists x\alpha$ durch $\forall x\neg\alpha$

Komplexität der Prädikatenlogik erster Stufe

- Es gibt für die Prädikatenlogik erster Stufe einen **vollständigen, korrekten Kalkül** zur Herleitung allgemeingültiger Formeln.

- Die Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**, d. h. es gibt kein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist.

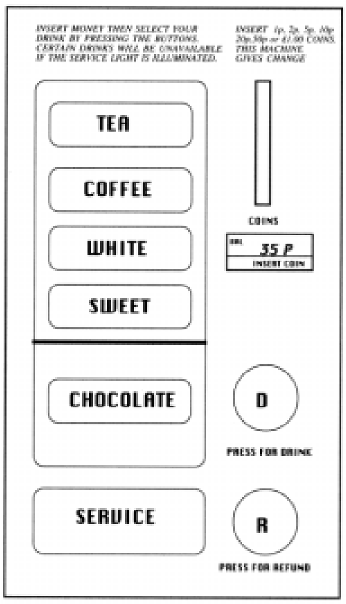
- Die Prädikatenlogik ist **rekursiv aufzählbar**, d. h. es gibt ein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist, das aber im negativen Fall nicht notwendig terminiert.

- Die **natürlichen Zahlen** lassen sich in der Prädikatenlogik erster Stufe **nicht** modellieren.

Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationssprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet **Prädikatenlogik**.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine" aus
Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff



Get_Drink

$$
\begin{array}{l}
\Delta Abs\_State\_Machine \\
choice? : \mathbb{P} Selection\_buttons \\
d! : Drink \\
Change! : \mathrm{bag}\ British\_coin \\
\hline
choice? \in Drink \\
Value\ Balance \geq Prices\ choice? \\
\forall i : Recipe\ choice? \bullet count\ Stock\ i > 0 \\
Cups > 0 \\
\exists b : bag\ British\_coins \bullet (b \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ b + Prices\ choice?) \\
Balance' = [\![\ ]\!] \\
Stock' \uplus \{ i : Recipe\ choice? \bullet i \mapsto 1 \} = Stock \\
Cups' = Cups - 1 \\
Change! \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ Change! + Prices\ choice? \\
Takings' \uplus Change! = Takings \\
Prices' = Prices \\
Service\_light' = Service\_light \\
Report\_display' = insert\ coin \\
d! = choice?
\end{array}
$$