2. Grundlegende Strukturen
2.1 Wertebereiche beschrieben durch Mengen

In der Modellierung von Systemen, Aufgaben, Lösungen kommen
Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, **aus welchem Wertebereich sie stammen**,
aber noch offen gelassen, welchen Wert sie haben.
Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welches ist die höchste?

Die Beschreibung des Modells wird präzisiert durch **Angabe der Wertebereiche**,
aus denen die Objekte, Konstanten, Werte von Variablen, Eingaben, Ausgaben,
Lösungen, usw. stammen.

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**
Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel: Modellierung von Kartenspielen

Wertebereich	**einige Elemente daraus**
KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}	8 Dame
KartenArten := {Kreuz, Pik, Herz, Karo}	Pik
Karten := KartenArten $\times$ KartenSymbole Menge aller Paare aus KartenArten und KartenSymbole	(Kreuz, 8) (Herz, Dame)

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 201

Ziele:

Beschreibung von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- präzise Angabe von Wertebereichen,
- Informationsgehalt untersuchen

Verständnisfragen:

Karten eines Kartenspieles werden auf 2 Spieler verteilt. Beschreiben Sie den Wertebereich einer solchen Verteilung in Worten.

Übersicht über Begriffe

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**

Grundlegender Kalkül: **Mengenlehre** (halbformal);
Mengen und Mengenoperationen

Strukturen über Mengen zur Bildung **zusammengesetzter Wertebereiche**

- Potenzmengen
- Kartesisches Produkt, Tupel
- Folgen
- Relation
- Funktion
- disjunkte Vereinigung

Verwendung des Kalküls:

Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen

Grundlage für alle anderen formalen Kalküle

abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 202

Ziele:

Übersicht zu diesem Abschnitt

in der Vorlesung:

Rolle der Mengen und Strukturen darüber;
Hinweise auf Bezüge zu

- anderen Kalkülen,
- Datentypen in Programmiersprachen

Einführendes Beispiel 2.1

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 203

Ziele:

Definition von Wertebereichen motivieren

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Aufgabe
- Präzise Modellierung interessiert hier - nicht Verfahren, um Lösungen zu finden.
- Modellierung auf der nächsten Folie

Beispiel 2.1 Modellierung mit Wertebereichen

Beschreibung	**formale Angaben**
Menge der Nationen	Nationen := {A, B, C}
Indexmenge zur Unterscheidung der Delegierten	Ind := {1, 2, 3, 4}
ein Delegierter modelliert durch ein **Paar**	(a, i) mit a $\in$ Nationen, i $\in$ Ind
Wertebereich der Delegierten	Delegierte := Nationen $\times$ Ind
Wertebereich der Arbeitsgruppen	
3-Tupel, kartesischesProdukt	AGn := $\{(A, i) \mid i \in Ind\} \times \{(B, j) \mid j \in Ind\} \times \{(C, k) \mid k \in Ind\}$
Wertebereich für **Teilmengen** von Sprachen	SprachMengen := Pow (Nationen) Pow (M) ist die **Potenzmenge** von M
Eine **Funktion** Sp gibt an, welche Sprachen ein	
Delegierter spricht:	Sp $\in$ DSpricht
Wertebereich solcher Funktionen	DSpricht := Delegierte -> SprachMengen
Wertebereich der gemeinsamen Sprachen einer AG	
Wertebereich	AGSpricht := AGn -> SprachMengen
GemSp ist eine Funktion daraus	GemSp $\in$ AGSpricht

N := M bedeutet „**Der Name N ist definiert als M**“.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 204

Ziele:

Beispiele im Zusammenhang sehen

in der Vorlesung:

- Vorschau auf Anwendung des Kalküls,
- informelle Erläuterungen,
- Werte aus den Wertebereichen angeben

Verständnisfragen:

- Geben Sie zu jedem der Wertebereiche einen konkreten Wert als Beispiel an.

Mengen

Menge: Zusammenfassung M von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge.
a ist Element aus M wird notiert $a \in M$.

Definition von Mengen durch

- **Aufzählen der Elemente (extensional)**: $M := \{1, 4, 9, 16, 25\}$
- **Angabe einer Bedingung (intensional)**: $M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, \text{a ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$

Mengen können aus **atomaren oder zusammengesetzten** Elementen gebildet werden,
z. B. Menge von Paaren {(Pik, 10), (Herz, Dame)}

Eine Menge kann auch **verschiedenartige Elemente** enthalten, z. B. {1, (Pik, 10), M, 9}
aber **nicht bei der Modellierung mit Wertebereichen**

Die Existenz von atomaren Objekten des jeweiligen Modellierungsbereiches wird vorausgesetzt, z. B. die natürlichen Zahlen, Arten und Werte von Spielkarten.

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- **Alle Elemente einer Menge sind verschieden.**
- **Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet.**
- **Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen definiert werden.**

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 205

Ziele:

Definition von Mengen verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele zu den Eigenschaften.
- Hier informelle Definition des Mengenbegriffs; axiomatische Mengenlehre definiert ihn strenger.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.1

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele jeweils für unterschiedliche intensionale und für unterschiedliche extensionale Definitionen derselben Menge.
- Vergleichen Sie den Mengenbegriff mit dem aus Mathe I.
- Geben Sie Mengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Russels Paradoxon

Man muss prinzipiell entscheiden können, ob ein Wert a **Element einer Menge** M ist, „$a \in M$?“

Russels Paradoxon:

Sei P die Menge aller Mengen, sie sich nicht selbst als Element enthalten,
also $P := \{ x \mid x \notin x\}$.

Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum **Widerspruch**.

Um solche Anomalien auszuschließen, geben wir in **intensionalen Mengendefinitionen** an, aus welchem größeren, **schon definierten Wertebereich** die Elemente stammen:

$M := \{a \mid a \in \mathbb{N}$, a ist Quadratzahl und $a \leq 30\}$

hier also „$a \in \mathbb{N}$“.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 205a

Ziele:

Intensionale Definitionen können widersprülich sein

in der Vorlesung:

- Paradoxon erläutern.
- Beispiel: "Der Barbier rasiert alle Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren." Ist er Element dieser Menge?

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.1

Mengenoperationen

die leere Menge	$\emptyset$	
Teilmenge von	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
echte Teilmenge von	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$
relatives Komplement	$U \setminus N$	mit $N \subseteq U$ Trägermenge

M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$

$|M|$ oder Card(M) ist die **Kardinalität** von M, d. H. die Anzahl der Elemente in M

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 206

Ziele:

Vorstellung der Mengenoperatoren

in der Vorlesung:

- Hinweis auf algebraische Gesetze; werden hier nicht vertieft

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.1

Verständnisfragen:

- Schlagen Sie die algebraischen Gesetze der Mengenoperatoren nach.

Potenzmengen

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U, geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U).
Pow (U) := $\{M \mid M \subseteq U\}$

Beispiel: Grundmenge U := {a, b} Potenzmenge Pow (U) = $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Kardinalität: $|\text{Pow}(U)| = 2^n$ wenn $|U| = n$

Wenn die **Werte Teilmengen von U** sind, ist ihr **Wertebereich die Potenzmenge von U**.

Beispiel 2.1: Wertebereich der Sprachen, die ein Delegierter spricht
SprachMengen := Pow (Nationen), $\{A, B\} \in$ SprachMengen

Modellierungstechnik: Menge von Lösungen statt einer Lösung
Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen fragen.
Der Wertebereich der Antwort ist die **Potenzmenge** des Wertebereiches der Lösungen.

Vergleiche auch **Mengentyp** in Pascal:

```
type Sprachen = set of {A, B, C};
var spricht: Sprachen;
spricht := {A, B};
```


Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 207

Ziele:

Potenzmenge als Wertebereich verstehen

in der Vorlesung:

- Kardinalität begründen
- Beispiele,
- Wert - Wertebereich; Menge - Potenzmenge
- Aufgabe mit Lösungsmenge

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.1

Verständnisfragen:

- Begründen sie die Kardinalitätsformel.
- Geben Sie Potenzmengen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Kartesisches Produkt

Kartesisches Produkt der Mengen M und N:

Menge **aller geordneten Paare** mit erster Komponente aus M und zweiter aus N

$M \times N := \{z \mid z = (x, y) \text{ und } x \in M \text{ und } y \in N\}$

oder kürzer $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

Zusammengesetzte Wertebereiche, z. B. Delegierte := Nation $\times$ Ind

Verallgemeinert zu (geordneten) **n-Tupeln**:

$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I\}$

mit **Indexmenge I** := {1, … , n} und n > 1

Beispiel:

Daten := Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre

Notation bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = M^n$ mit n > 1

Beispiel:

Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Kardinalität: $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n | = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit I = {1,..., n} mit n > 1

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 208

Ziele:

Zusammengesetzte Wertebereiche verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Ordnung der Komponenten ist wichtig.
- Beispiel für geschachtelte Tupel

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Was ist der Unterschied zwischen Nation x Ind x SprachMengen und (Nation x Ind) x SprachMengen?
- Welches ist besser im Sinne von Beispiel 2.1?
- Geben Sie kartesiche Produkte an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Folgen

Endliche Folgen von Elementen aus A: n-Tupel über A von beliebiger Länge n > 0

$\mathbf{A^+} := \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i \geq 1 \}$ d. h. $(a_1, ..., a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$

Notationen:

ε oder ()	**die leere Folge**
$A^0 := \{ \varepsilon \}$	Menge, die nur die leere Folge über A enthält
$A^1 := \{ (a) \mid a \in A\}$	Menge einelementiger Folgen über A
$\mathbf{A^* := A^+ \cup A^0}$	der Wertebereich von Folgen über A, der auch die leere Folge enthält.

Beispiele:

$(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$

$(m, o, d, e, l, l) \in \text{Buchstaben}^+$

neueAufträge := Auftrag*

gezogeneKarten := Karten*

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 208a

Ziele:

Folgen gleichartiger Elemente

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- 1-Tupel und 0-Tupel sind auf Folie Mod2.8 nicht als kartesische Produkte definiert. Deshalb werden hier leere und einelementige Folgen definiert.
- + und * Notation erläutern
- weitere Beispiele
- Verwendung der leeren Folge

Verständnisfragen:

- Aus einer Folge natürlicher Zahlen sollen die geraden Zahlen gestrichen werden. Aus welchem Wertebereich stammt das Ergebnis?
- Geben Sie Folgen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.

n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

Eine solche Relation R stammt also aus dem **Wertebereich Pow** $(\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})$

Seine **Kardinalität** ist $|\mathbf{Pow}\ (\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})| = 2^{\prod_{i \in I} |Mi|}$, falls alle $\mathbf{M_i}$ endlich sind.

Eine Relation R definiert eine **Aussage über Tupel**.
Wir sagen auch: „Eine Relation R gilt für die Tupel in R.“

Beispiele: NationenKleiner := {(A, C), (C, B), (A, B)} $\subseteq$ Nationen^2

Oder := {(w, w), (w, f), (f, w)} $\subseteq$ Bool^2

GültigeDaten $\subseteq$ Daten = Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre

(20, Oktober, 2000) $\in$ GültigeDaten, (30, Februar, 2000) $\notin$ GültigeDaten

alternative Schreibweisen für Elemente aus Relationen:
R(a) für a $\in$ R, z. B. GültigeDaten(20, Oktober, 2000)

bei 2-stelligen Relationen auch mit Operatoren:
x R y für (x, y) $\in$ R, z. B. $x \leq y$, $a \neq b$, $p \rightarrow q$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 209

Ziele:

Allgemeine Relationen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Zusammenhang zwischen Relation und Aussage über Tupel.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Geben Sie Beispiele für Relationen zwischen Werten aus unterschiedlichen Wertebereichen.
- Geben Sie Relationen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ sind folgende Begriffe definiert:

- **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt $x\ R\ x$;
- **irreflexiv**, wenn für kein $x \in M$ gilt $x\ R\ x$;
- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$;
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ folgt $x = y$;
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt, $y\ R\ x$ gilt nicht;
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt, aus $x\ R\ y$ und $y\ R\ z$ folgt $x\ R\ z$;
- **alternativ**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt $x\ R\ y$ oder $y\ R\ x$;
- **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Hinweise zum Anwenden der Definitionen:

- „**x R y**“ bedeutet „**(x, y)** $\in$ **R**“
- **„**für alle $x \in M$ gilt ...“: der **gesamte Wertebereich M** muss geprüft werden
- „für alle $x, y \in M$ gilt ...“: alle Paare von Werten aus M prüfen, auch solche mit $x = y$
- „A **oder** B“ ist wahr, wenn **mindestens eins von beiden wahr** ist
- „**aus A folgt B**“ ist gleichwertig zu „**(nicht A) oder B**“.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 210

Ziele:

Definitionen verstehen und einprägen

in der Vorlesung:

- Die Form der Definitionen wird erläutert.
- Das Prüfen der Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} erläutert.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Konstruieren Sie zu jeder Eigenschaft eine Relation R über M = {A, B, C}, die die Eigenschaft nicht erfüllt. Beschreiben Sie R in Worten.

Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ ist eine

- **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Quasiordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **totale** oder **lineare Ordnung**, wenn R eine alternative Halbordnung ist, also alternativ, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 210a

Ziele:

Definition der Ordnungsrelationen verstehen

in der Vorlesung:

- Die Definitionen werden erläutert.
- Die Definitionen wird an Relationen mit kleiner Menge M = {A, B, C} sowie an < und <= über N geprüft erläutert.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Beschreiben Sie den Unterschied zwischen Halbordnung und totaler Ordnung. Geben Sie ein Beispiel dazu an.

Funktionen

Eine **Funktion f ist eine 2-stellige Relation f $\subseteq$ D $\times$ B** mit folgender Eigenschaft:
Aus (x, y) $\in$ f und (x, z) $\in$ f folgt y = z, d. h. zu einem Urbild x gibt es nur ein Bild y.

D ist der **Definitionsbereich** von f; B ist der **Bildbereich** von f
D und B können beliebige, auch zusammengesetzte Wertebereiche sein.

Der **Wertebereich D -> B** ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B $\subseteq$ Pow (D $\times$ B).**
D -> B enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über **D $\times$ B**, die Funktionen sind

Für eine Funktion f $\in$ D -> B gilt f $\subseteq$ D $\times$ B.
Statt **f** $\in$ **D -> B** sagt man auch **f hat die Signatur D -> B** oder kurz **f: D -> B**

Schreibweisen für (x, y) $\in$ f auch y = f (x) oder f (x) = y oder x f y

Die Menge der Paare (x, y) $\in$ f heißt **Graph von f**.

Beispiele:

Funktion	Wertebereich
not := {(w, f), (f, w)}	Bool -> Bool
id := {(w,w), (f, f)}	Bool -> Bool
Quadrat := {(a, b) | a $\in$ $\mathbb{N}$ und b = a*a}	$\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
ggt := {((a,b),c) | a, b, c $\in$ $\mathbb{N}$ und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und b}	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
Sp := {((A, 1), {A,B}), ((B, 2), {B})}	Delegierte -> SprachMengen

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 211

Ziele:

Grundbegriffe von Funktionen verstehen

in der Vorlesung:

- Begriffe an Beispielen erläutern
- unterscheiden: Funktion, ihre Definition, der Wertebereich, aus dem sie stammt

Achtung! unterschiedliche Verwendung von Begriffen:

- hier: Der **Wertebereich D -> B** ist die Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden.
- hier: Die Funktion f: D -> B hat den **Bildbereich B**.
- Mathe I: Der **Wertebereich einer Funktion f: D -> B ist B**
- Goos: Der Bildbereich einer Funktion f: D -> B ist **Bild(f) = B** . (Werde ich hier nicht verwenden.)
- Mathe I: Das **Bild von f** ist die Menge der Werte, auf die f abbildet.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

Geben Sie Funktionen und ihre Wertebereiche an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion **f : D -> B** heißt

- **total**, wenn es für jedes x ∈ D ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **partiell**, wenn f für einige x ∈ D nicht definiert sein könnte,
- **surjektiv**, wenn es zu jedem y ∈ B ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **injektiv**, wenn es zu jedem y ∈ B höchstens ein Paar (x, y) ∈ f gibt,
- **bijektiv**, wenn f zugleich surjektiv und injektiv ist.

n-stellige Funktion: f: D -> B; der Definitionsbereich D ist ein Wertebereich von n-Tupeln

0-stellige Funktion k: -> B; der Definitionsbereich ist der **leere Wertebereich**;
k ist eine **konstante Funktion**; b = k() ist ein fester Wert

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen | D -> B | = $(|B|+1)^{|D|}$

Anzahl der totalen Funktionen in | D -> B | ist $|B|^{|D|}$

Anzahl der Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen mit dieser Signatur
z. B. |{A, B, C} -> {w, f}| = 3^3 = 27 insgesamt; 2^3= 8 totale Funktionen in |{A, B, C} -> {w, f}|

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 212

Ziele:

Begriffe einprägen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Begriffe erläutern
- Graphiken dazu
- Kardinalität begründen

Verständnisfragen:

- Charakterisieren Sie die Eigenschaften graphisch.

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion

$\mathbf{id_M}$: M -> M mit id_M := { (x, x) | x∈M }

Charakteristische Funktion χ_M **einer Menge** M ⊆ U, mit der Trägermenge U

gibt an, welche Elemente der Trägermenge U in M enthalten sind.

χ_M : U -> Bool mit χ_M := { (x, b) | x ∈ U und b = (x∈M)}

χ_M ist eine totale Funktion

Funktionen mit Bildbereich Bool heißen **Prädikate**.

z. B. <= : ($\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$) -> Bool

Funktionen zur Modellierung von **mehrfachen Vorkommen**:

b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt

z. B. geldBeutel: brdMünzen -> $\mathbb{N}_0$

mit geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (50, 1), (100, 3), (200, 2), (500, 1)}

So kann man sog. **Multimengen (bags)**, in denen Elemente mehrfach vorkommen können, beschreiben.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 213

Ziele:

Spezielle Anwendungsmuster

in der Vorlesung:

- Zusammenhang zu Relationen erläutern.
- Beispiele für charakteristische Funktionen und Multimengen angeben.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Geben Sie weitere Anwendungen für solche Funktionen an.

Funktionen auf Indexmengen

Indexmengen dienen zur Unterscheidung von Objekten des Modellbereiches
z. B. Ind = {1, ..., n}, KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

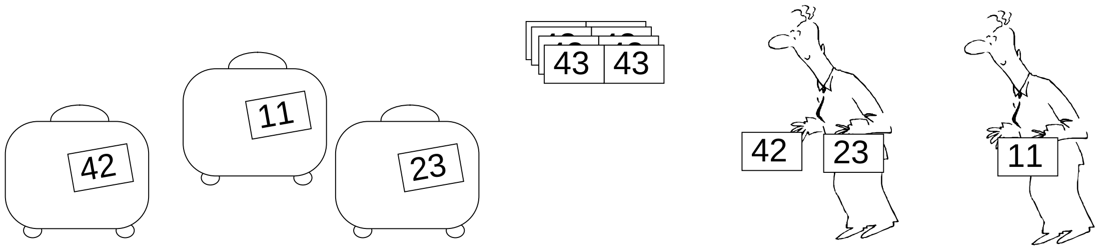
Funktionen auf Indexmengen modellieren ...

das Auftreten von Werten in Folgen:

Beispiel:

eine Folge	F := (w, e, l, l, e)
Indexmenge dazu	FPositionen := {1, 2, 3, 4, 5}
Werte in der Folge	FWerte := {w, e, l}
Auftreten von Werten in der Folge	FAuftreten := {(1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e)}
Wertebereich	FAuftreten $\in$ FPositionen -> FWerte

Zuordnungen zwischen Mengen:
z. B. Gepäckstücke ihren Eigentümern zuordnen durch ein Funktionenpaar
Marke1 $\in$ Ind -> Gepäckstücke (injektiv) Marke2 $\in$ Ind -> Eigentümer



Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 213a

Ziele:

Zwei Modellierungschemata

in der Vorlesung:

- Unterschied: "Werte, die (irgendwo) auftreten", "verschiedene Auftreten eines Wertes".
- Zuordnen durch Markieren mit der gleichen Marke,

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt A.2

Verständnisfragen:

- Warum muss Marke1 injektiv sein, Marke2 aber nicht?
- Geben Sie weitere Anwendungen für Funktionen mit Indexmengen an.

Disjunkte Vereinigung

Die allgemeine **disjunkte Vereinigung** fasst n Wertebereiche (Mengen) A_1, A_2, ..., A_n zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammen, wobei I := {1, ..., n}.
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Anwendungsmuster:

V ist ein allgemeinerer Wertebereich, abstrahiert von den spezielleren A_i

Beispiele:

Kunden := {Siemens, Benteler, Unity} Lieferanten := {Orga, Siemens}
Ind := {Kunde, Lieferant}
GeschäftsPartner := { (Kunde, Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, Unity), (Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)}

Buchstaben := {a, b, ..., z} Ziffern := {0, 1, ..., 9} Ind := {Buchstabe, Ziffer}

Zeichen = $\{ (\text{Buchstabe}, b) \mid b \in \text{Buchstaben}\} \cup \{ (\text{Ziffer}, z) \mid z \in \text{Ziffern}\}$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 214

Ziele:

Kennzeichnung von Werten

in der Vorlesung:

- Rolle des Kennzeichenfeldes
- Klassifikation von Wertebereichen
- Vergleich mit Varianten-Records in Pascal

Verständnisfragen:

Geben Sie Wertebereiche mit disjunkten Vereinigungen an, die sie für die Modellierung des Getränkeautomaten benötigen.

Hinweise zum Modellieren mit Wertebereichen

- Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden.
- Typische Elemente eines Wertebereiches angeben - der Wertebereich ist eine Menge davon.
- Wertebereichen ausdruckskräftige Namen geben.
- Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen (oder zerlegen).
- Entwürfe prüfen: Wertebereiche in Worten erklären.
- Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich.
- Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln.
- Alle Klammern haben Bedeutung - zusätzliche verändern das Modell.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 214a

Ziele:

Modellierungsfehler vermeiden

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu an typischen Fehlern

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Übungsaufgaben:

Untersuchen Sie:

- Welche Aspekte des Getränkeautomaten können Sie mit Mengen als Wertebereichen gut Modellieren?
- Für welche Aspekte eignet sich der Kalkü nicht so gut.