Anwendungen algebraischer Spezifikationen: Eigenschaften aus den Axiomen erkennen

Beispiel: Keller

1. K3: pop (push (k, t)) ≡ k

Keller-Prinzip: zuletzt eingefügtes Element wird als erstes wieder entfernt (last-in-first-out, LIFO)

2. top: Keller -> Element
   K4: top (push (k, t)) ≡ t

top ist die einzige Operation, die Keller-Elemente liefert:
Nur auf das zuletzt eingefügte, nicht wieder entfernte Element kann **zugegriffen** werden.

3. push (.... push (createStack, n_1) , ...), n_m), mit m≥ 0
   K3: pop (push (k, t)) ≡ k

Die **Anzahl der Elemente im Keller** ist
die Anzahl der push-Operationen abzüglich der Anzahl der pop-Operationen im Term.
Begründung: Rückführung auf Normalform, eine push-Operation für jedes Element im Keller.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 230

Ziele:

Axiome spezifizieren Eigenschaften

in der Vorlesung:

- Die drei Beispiele erläutern
- Über Keller nachdenken, ohne sie zu implementieren

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 3.3

Spezifikation um Operationen erweitern

Erweitere die Keller-Spezifikation um eine **Operation size**.
Sie soll die **Anzahl der Elemente im Keller** liefern.

1. Operation **size in die Signatur einfügen:**
   size: Keller -> N

2. Ergebnis-Sorte **N zu den Sorten zufügen**:
   S = {Keller, Element, BOOL, N}

3. **Axiome zufügen**, so dass size für jeden Keller-Wert definiert ist:
   K7: size (createStack) ≡ 0
   K8: size (push (k, t)) ≡ size (k) + 1

Weil in der **Normalform** nur createStack und push vorkommen, braucht size nur für solche Terme definiert zu werden.

Es wird vorausgesetzt, dass für die Sorte N die Konstanten 0 und 1 sowie die Operation + definiert sind.

Ziele:

Operationen und Axiome entwerfen

in der Vorlesung:

Schritte zur Erweiterung der Spezifikation zeigen

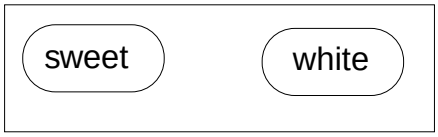
nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 3.3

Verständnisfragen:

Erweitern Sie die Spezifikation um eine Operation, die 2 Elemente einfügt.

Abstrakte Algebra für Teilaspekt des Getränkeautomaten



Knöpfe des Getränkeautomaten
zur Auswahl von Zutaten

Signatur $\Sigma = (S, F)$;

Sorten S := {Add, Choice}

Operationen F:

sweet:	-> Add
white:	-> Add
noChoice:	-> Choice
press: Add x Choice	-> Choice

Die Sorte **Choice** modelliert die Auswahl;
Add ist eine Hilfssorte

Bedeutung der Axiome:

Q_1: Knopf nocheinmal drücken macht Auswahl rückgängig.

Q_2: Es ist egal, in welcher Reihenfolge die Knöpfe gedrückt werden.

Axiome Q: für alle a, b der Sorte Add und
für alle c der Sorte Choice gilt:

Q_1: press (a, press (a, c)) $\equiv$ c

Q_2: press (a, press (b, c)) $\equiv$ press (b, press (a, c)

Beispiel-Terme: press (white, noChoice)
press (sweet, press (white, press (sweet, noChoice)))

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 231a

Ziele:

Abfolge von Bedienoperationen modellieren

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- den beiden Sorten,
- den Axiomen: sie identifizieren Terme gleicher Bedeutung;
- der Bedeutung der Axiome

Übungsaufgaben:

Untersuchen und erläutern Sie

- Alternativen zu dieser Algebra;
- Algebren zur Modellierung von Knöpfen, die nur alternative betätigt werden können.

Verständnisfragen:

Begründen Sie die Bedeutung der Axiome anhand von Termen.

Realisierung der Spezifikation durch eine konkrete Algebra

Beispiel: eine Realisierung von Kellern durch **Funktionen auf Folgen** von natürlichen Zahlen:

Zuordnung der Sorten:	**konkret**	**abstrakt**
	Bool	BOOL
	$\mathbb{N}_0$	Element
	N-Folge = $\mathbb{N}_0^*$	Keller

Signatur und **Zuordnung von Funktionen**

konkret			**abstrakt**
newFolge:		-> N-Folge	createStack
append:	N-Folge x $\mathbb{N}_0$	-> N-Folge	push
remove:	N-Folge	-> N-Folge	pop
last:	N-Folge	-> $\mathbb{N}_0$	top
noElem:	N-Folge	-> Bool	empty

Definition der Funktionen

newFolge( )	-> ()
append ((a_1, ..., a_n), x)	-> (a_1, ..., a_n, x)
remove ((a_1, ..., a_{n-1}, a_n))	-> (a_1, ..., a_{n-1})
last ((a_1, ..., a_n))	-> a_n
noElem (f)	-> f = ()

Gültigkeit der Axiome zeigen

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 232

Ziele:

Beispiel für eine Realisierung

in der Vorlesung:

Funktionen erläutern

- Zuordnung erläutern
- Gültigkeit der Axiome zeigen

Übungsaufgaben:

Mit der Klasse Vector aus java.lang kann man Keller implementieren. Schlagen sie ihre Dokumentation nach und begründen Sie, dass sich die Methoden addElement, removeElemenAt, lastElement, und size dafür eignen.

Keller in Algorithmen einsetzen

Aufgabe: Terme aus **Infix-Form in Postfix-Form** umwandeln
gegeben: Term t in Infix-Form, mit 2-stelligen Operatoren unterschiedlicher Präzedenz, zunächst ohne Klammern
gesucht: Term t in Postfix-Form

Eigenschaften der Aufgabe und der Lösung:

1. **Reihenfolge der Variablen und Konstanten bleibt unverändert**
2. **Variablen und Konstanten werden vor ihrem Operator ausgegeben**, also sofort
3. In der Infix-Form aufeinander folgende **Operatoren echt steigender Präzedenz** stehen in der Postfix-Form **in umgekehrter Reihenfolge**; also kellern.
4. **Operatorkeller enthält Operatoren echt steigender Präzedenz**.
   Es gilt die **Kellerinvariante KI**:
   Sei push (... push (CreateStack, opr_1), opr_2), ...) dann gilt
   Präzedenz (opr_i) < Präzedenz (opr_{i+1})

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 233

Ziele:

Kelleranwendung verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Eigenschaften
- Eigenschaften der Aufgabe verstehen, bevor sie gelöst wird
- Kellerinvariante: Eine Aussage, die für die Benutzung des Kellers immer gelten muss.

Verständnisfragen:

Wie werden bei diesen Regeln aufeinander folgende Operatoren gleicher Präzedenz behandelt?

Algorithmus: Infix- in Postfix-Form wandeln

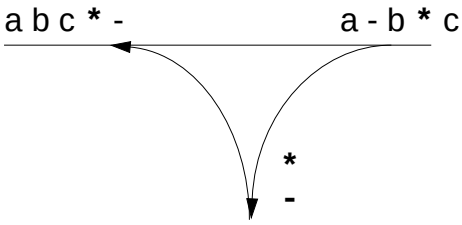
Die Eingabe enthält einen Term in Infix-Form;
die Ausgabe soll den Term in Postfix-Form enthalten

```
Variable: keller ∈ Keller; symbol ∈ Operator ∪ ElementarOperand

keller = createStack();
solange Eingabe nicht leer wiederhole                    {KI}
        lies symbol
        falls symbol ∈ ElementarOperand
                gib symbol aus
        falls symbol ∈ Operator                          {KI}
                solange  not empty (keller) ∧
                         Präzedenz (top (keller)) ≥ Präzedenz (symbol)
                wiederhole                               {KI}
                         gib top (keller) aus;
                         keller = pop (keller);
                keller = push(keller, symbol);           {KI}

solange not empty (keller) wiederhole
        gib top(keller) aus;
        keller = pop(keller);
```

An den Stellen {KI} gilt die Kellerinvariante.



Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 234

Ziele:

Benutzung der Kelleroperationen verstehen

in der Vorlesung:

- Algorithmus erläutern
- Graphik erläutern
- Gültigkeit der Kellerinvariante zeigen