3.2 Verifikation von Aussagen über Algorithmen

Hoaresche Logik: Kalkül zum Beweisen von **Aussagen über Algorithmen und Programme**, Programm-**Verifikation**, [C.A.R. Hoare, 1969].

Statische Aussagen über Zustände des Algorithmus, über Werte von Variablen nachweisen, ohne den Algorithmus auszuführen. Aussagen **gelten für alle Ausführungen** des Algorithmus. Im Gegensatz zum **dynamischen Testen**: Ausführen des Algorithmus für bestimmte Eingaben.

Durch logische Schlüsse über die Elemente von Algorithmen wird gezeigt, dass

- ein Algorithmus **aus jeder zulässigen Eingabe die geforderte Ausgabe** berechnet, z. B.

{ gegeben }	Algorithmus	{ gesucht }
{ a, b $\in \mathbb{N}$ }	Euklidischer Algorithmus	{ x ist größter gemeinsamer Teiler von a, b }

- eine Aussage an jeder Stelle des Algorithmus gilt, **Invariante**, z. B. Kellerinvariante in Mod-2.34
- an einer bestimmten **Stelle im Algorithmus eine bestimmte Aussage gilt** z. B. { $\neg$ empty (keller) } keller = pop (keller);
- **Schleifen terminieren.**

Ein **Algorithmus und die Aussagen dazu sollen zusammen konstruiert** werden.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 309

Ziele:

Bedeutung der Verifikation erkennen

in der Vorlesung:

- Ziele der Verifikation erläutern
- Man wählt die Aussagen, die man über den Algorithmus beweisen will, z.B. seine Spezifikation
- Nicht: "Der Algorithmus wird bewiesen."

Verifikation: Algorithmus berechnet ggT

Vorbedingung: x, y $\in \mathbb{N}$, d. h. x > 0, y > 0; sei G größter gemeinsame Teiler von x und y
Nachbedingung: a = G

Algorithmus mit { Aussagen über Variable }:

{ G ist ggT von x und y $\wedge$ x>0 $\wedge$ y>0 }
a := x; b := y;
{ INV: G ist ggT von a und b $\wedge$ a>0 $\wedge$ b>0 }
solange a $\neq$ b wiederhole
  { INV $\wedge$ a $\neq$ b }
  falls a > b :
    { G ist ggT von a und b $\wedge$ a>0 $\wedge$ b>0 $\wedge$ a>b } $\rightarrow$
    { G ist ggT von a-b und b $\wedge$ a-b>0 $\wedge$ b>0 }
    a := a - b
    { INV }
  sonst
    { G ist ggT von a und b $\wedge$ a>0 $\wedge$ b>0 $\wedge$ b>a } $\rightarrow$
    { G ist ggT von a und b-a $\wedge$ a>0 $\wedge$ b-a>0 }
    b := b - a
    { INV }
  { INV }
{ INV $\wedge$ a = b } $\rightarrow$
{ a = G }

Terminierung der Schleife:
- a+b fällt monoton
- a+b > 0 ist Invariante

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 309a

Ziele:

Beispiel für eine Algorithmenverifikation

in der Vorlesung:

Hier nur ersten Eindruck vermitteln. Später Erläuterungen

- zur Konstruktionsidee,
- zur Rolle der Schleifeninvarianten,
- zur Anwendung der Alternativenregel,
- zu Anwendungen der Zuweisungsregel
- zum Terminierungsnachweis

Notation von Algorithmenelementen

Anweisungsform	Notation	Beispiel
Sequenz	Anweisung$_1$**;** Anweisung$_2$	**a := x;** **b := y**
Zuweisung	Variable **:=** Ausdruck	**a := x**
Alternative, zweiseitig	**falls** Bedingung **:** Anweisung$_1$ **sonst** Anweisung$_2$	**falls a > b :** **a := a - b** **sonst b := b - a**
bedingte Anweisung	**falls** Bedingung **:** Anweisung$_1$	**falls a < 0 :** **a := - a**
Aufruf eines Unteralgorithmus ua	ua	**berechneGgT**
Schleife	**solange** Bedingung **wiederhole** Anweisung	**solange a≠b wiederhole** **falls a > b:** ...

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 309b

Ziele:

Einfache Notation von Algorithmen

in der Vorlesung:

6 Anweisungsformen und ihre Schreibweise erläutern

- Zuweisungszeichen := wie in Pascal (nicht wie in Java =),
- Einrückung ist wichtig, um die Struktur auszudrüen
- Verifikation von Aufrufen hier nur ohne Parameter,
- als Anweisung kann jede der 6 Formen - auch geschachtelt - eingesetzt werden,
- rekursive Definition von Anweisungsformen!

Verständnisfragen:

Zeigen Sie die Anwendung der Anweisungsformen am ggT-Algorithmus auf mod-3.9a

Notation von Aussagen zur Verifikation

Aussagen über den Algorithmenzustand, über Werte von Variablen
werden in den Algorithmus eingefügt:

$\{ P \}\ A_1\ \{ Q \}\ A_2\ \{ R \}$

bedeutet: Q gilt immer zwischen der Ausführung von A_1 und der Ausführung von A_2

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ `i := i + 1;` $\{ i \geq 0 \}$ `a [i] := k;` {...}

Zur Verifikation eines Algorithmus muss für jede Anweisung S ein Nachweis geführt werden:

{ Vorbedingung P } S { Nachbedingung Q }

nachweisen: Wenn vor der Ausführung des Schrittes S die P gilt,
dann gilt Q nach der Ausführung von S, falls S terminiert.

Beispiel: $\{ i + 1 \geq 0 \}$ `i := i + 1;` $\{ i \geq 0 \}$ mit Zuweisungsregel nachweisen

Die Aussagen werden entsprechend der **Struktur von S verknüpft**.
Für jede Anweisungsform wird eine spezielle **Schlussregel** angewandt.

Eine **Spezifikation liefert Vorbedingung und Nachbedingung** des gesamten Algorithmus:

gegeben:		gesucht:
Aussagen über die Eingabe		Aussagen über Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgabe
{ Vorbedingung }	Algorithmus	{ Nachbedingung }

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 310

Ziele:

Notation von Aussagen im Algorithmus

in der Vorlesung:

- Terminierung muss separat gezeigt werden
- Aussagen haben keinen Einfluss auf den Algorithmus

Schlussregeln für Sequenz

Hoarescher Kalkül definiert **für jede Anweisungsform** ein **Regelschema.**

Sequenzregel:

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ S_2\ \{R\}}{\{P\}\ S_1; S_2\ \{R\}}$$

Bedeutung:

Wenn $\{P\}\ S_1\ \{Q\}$ und $\{Q\}\ S_2\ \{R\}$ korrekte Schlüsse sind, dann ist auch $\{P\}\ S_1; S_2\ \{R\}$ ein korrekter Schluss

Beispiel:

$$\frac{\{ x>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{a := x;}\ \{ a>0 \wedge y>0 \} \qquad \{ a>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{b := y;}\ \{ a>0 \wedge b>0 \}}{\{ x>0 \wedge y>0 \}\ \texttt{a := x; b := y;}\ \{ a>0 \wedge b>0 \}}$$

im Algorithmus die Schritte

$\{ x>0 \wedge y>0 \}$
`a := x;`
$\{ a>0 \wedge y>0 \}$

und

$\{ a>0 \wedge y>0 \}$
`b := y;`
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$

zusammensetzen:

$\{ x>0 \wedge y>0 \}$
`a := x;`
$\{ a>0 \wedge y>0 \}$
`b := y;`
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 311

Ziele:

Notation von Schlussregeln

in der Vorlesung:

- Prinzip an der Sequenzregel erläutern
- Beispiel erläutern

Konsequenzregeln

Abschwächung der Nachbedingung

$$\frac{\{P\}\ S\ \{R\} \qquad \{R\} \rightarrow \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Verschärfung der Vorbedingung

$$\frac{\{P\} \rightarrow \{R\} \qquad \{R\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Beispiel:

$$\frac{\{a+b > 0\}\ x := a+b\ \{x > 0\} \qquad \{x > 0\} \rightarrow \{x \geq 0\}}{\{a+b > 0\}\ x := a+b\ \{x \geq 0\}}$$

im Algorithmus können Implikationen in Ausführungsrichtung eingefügt werden:

$\{ a+b > 0 \}$
$x := a+b$
$\{ x > 0 \} \rightarrow \{ 2*x \geq 0\}$
$y := 2*x$
$\{ y \geq 0\}$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 312

Ziele:

Vor- und Nachbedingung anpassen

in der Vorlesung:

Anwendung beim Zusammensetzen von Algorithmenschritten zeigen

Verständnisfragen:

Zuweisungsregel

Die Zuweisung x := e wertet den Ausdruck e aus und weist das Ergebnis der Variablen x zu.

$$\{ P \begin{smallmatrix} x \\ e \end{smallmatrix} \} \; x := e \; \{P\}$$

$P \begin{smallmatrix} x \\ e \end{smallmatrix}$ steht für die **Substitution von x durch e in P**, d. h. P [x/e].

Beispiele: $\{a > 0\}$ x := a $\{x > 0\}$
$\{i + 1 > 0\}$ i := i + 1 $\{i > 0\}$

Wenn man zeigen will, dass **nach der Zuweisung eine Aussage P für x** gilt,
muss man zeigen, dass **vor der Zuweisung dieselbe Aussage P für e** gilt.

Beispiele im Algorithmus:

{ x>0 ∧ y>0 }
a := x;
{ a>0 ∧ y>0 }
b := y;
{ a>0 ∧ b>0 }

{ G ist ggT von a-b und b ∧ a-b>0 ∧ b>0 }
a := a - b
{ G ist ggT von a und b ∧ a>0 ∧ b>0 }

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 313

Ziele:

Zuweisungsregel verstehen

in der Vorlesung:

- Substitution erläutern
- Vorbedingung aus der Nachbedingung rückwärts konstruieren: Was will ich zeigen?
- Beispiele von Folie Mod-313a erläutern

Beispiele für Zuweisungsregel

$\{ P^{x}_{e} \}$ x := e { P }
in P x durch e ersetzt

1.	{ a > 0 }	x := a	{ x > 0 }	
2.	{ a > 0 ∧ a > 0 }	x := a	{ x > 0 ∧ a > 0 }	x durch a ersetzen - nicht umgekehrt
3.	{ a > 0 ∧ x = 7 }	x := a	{ x > 0 ∧ x = 7 }	**falscher Schluss**! **alle** x durch a ersetzen!
4.	{ a > 0 ∧ z > 0 }	x := a	{ x > 0 ∧ z > 0 }	z > 0 ist nicht betroffen
5.	{ i + 1 > 0 }	i := i + 1	{ i > 0 }	
6.	{ i ≥ 0} ≡ { i + 1 > 0 }	i := i + 1	{ i > 0 }	passend umformen
7.	{ i = 2 } ≡ { i + 1 = 3 }	i := i + 1	{ i = 3 }	passend umformen
8.	{ wahr } ≡ { 1 = 1 }	x := 1	{ x = 1 }	passend umformen
9.	{ z = 5 } ≡ { z = 5 ∧ 1 = 1 }	x := 1	{ z = 5 ∧ x = 1 }	passend umformen

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 313a

Ziele:

Gebrauch der Zuweisungsregel üben

in der Vorlesung:

- Erläuterung und Begründung der Beispiele;
- Aus der gewünschten Nachbedingung die Vorbedingung herstellen.
- Dann zeigen, dass die Vorbedingung wirklich gilt.

Aufrufregel

Aufruf eines Unteralgorithmus UA
mit der Spezifikation: Vorbedingung P, Nachbedingung Q:

{ P } UA { Q }

Diese Regel gilt nur für Unteralgorithmen **ohne Parameter** und **ohne Funktionsergebnis**.
Sie lesen oder schreiben globale Variable. Sie können in P und Q vorkommen.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 313b

Ziele:

Einfache Aufrufregel

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiel dazu

Regel für 2-seitige Alternative

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ S_1\ \{ Q \} \qquad \{ P \wedge \neg B \}\ S_2\ \{ Q \}}{\{ P \}\ \text{falls } B\text{: } S_1 \text{ sonst } S_2\ \{ Q \}}$$

Aus der
gemeinsamen Vorbedingung P
führen beide Zweige auf
dieselbe Nachbedingung Q

Beispiel:

$$\frac{\{ a > 0 \}\ b := a\ \{ b > 0 \} \rightarrow \{ b \geq 0 \} \qquad \{ \neg (a > 0) \} \rightarrow \{ -a \geq 0 \}\ b := -a\ \{ b \geq 0 \}}{\{ \text{true} \}\ \text{falls } a > 0\text{: } b := a \text{ sonst } b := -a\ \{ b \geq 0 \}}$$

im Algorithmus:

$\{ a>0 \wedge b>0 \wedge a \neq b \}$
`falls a > b :`
$\quad \{ a>0 \wedge b>0 \wedge a>b \} \rightarrow$
$\quad \{ a-b>0 \wedge b>0 \}$
`a := a - b`
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$
`sonst`
$\quad \{ a>0 \wedge b>0 \wedge b>a \} \rightarrow$
$\quad \{ a>0 \wedge b-a>0 \}$
`b := b - a`
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$
$\{ a>0 \wedge b>0 \}$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 314

Ziele:

Regel verstehen

in der Vorlesung:

- Beide Zweige müssen auf dieselbe Aussage führen
- Beispiele zeigen
- Konsequenzregeln mitverwendet

Regel für bedingte Anweisung

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ \ S\ \{ Q \} \qquad P \wedge \neg B \ \rightarrow Q}{\{ P \}\ \text{falls } B : S\ \{ Q \}}$$

Aus der
gemeinsamen Vorbedingung P führen die Anweisung und die Implikation auf **dieselbe Nachbedingung Q**

Beispiel:

$$\frac{\{ P \wedge a < 0 \}\ \ a := -a\ \ \{ P \wedge a \geq 0 \} \qquad P \wedge \neg (a < 0) \rightarrow \quad P \wedge a \geq 0}{\{ P \}\ \text{falls } a < 0 : a := -a\ \{ P \wedge a \geq 0 \}}$$

im Algorithmus:

{ P }
falls a < 0 :
    { P ∧ a < 0 } → { P ∧ -a > 0 }
    a := - a;
    {P ∧ a > 0 } → { P ∧ a ≥ 0 }
leere Alternative:
    { P ∧ ¬ (a < 0) → P ∧ a ≥ 0 }
{ P ∧ a ≥ 0 }

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 314a

Ziele:

Regel verstehen

in der Vorlesung:

- Die leere Alternative muss auf dieselbe Aussage führen wie die Anweisung.
- leere Alternative im Algorithmus sichtbar machen.
- Beispiele zeigen.

Schleifenregel

Wiederholung, Schleife:

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ S\ \{ P \}}{\{ P \}\ \text{solange } B \text{ wiederhole } S\ \{ P \wedge \neg B \}}$$

Eine Aussage P heißt **Schleifeninvariante**, wenn man zeigen kann, dass sie an folgenden Stellen gilt: **vor der Schleife**,
vor und nach jeder Ausführung von S und
nach der Schleife.

Beispiel: Algorithmus zum Potenzieren

a := x; b := y; z := 1;

{ **INV** } **INV: $z \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0$**

solange $b > 0$ wiederhole

{ **INV** $\wedge\ b > 0$ } $\equiv$ { $z \cdot a \cdot a^{b-1} = x^y \wedge (b-1) \geq 0$ }

b := b - 1;

{ $z \cdot a \cdot a^b = x^y \wedge b \geq 0$ }

z := z · a

{ **INV** }

{ **INV** $\wedge\ b \leq 0$ } $\rightarrow$ { $z \cdot a^b = x^y \wedge b = 0$ } $\rightarrow$ { $z = x^y$ }

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 315

Ziele:

Schleifeninvariante verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Das Prinzip Invariante erläutern.
- Schlussregel erläutern.
- Am Beispiel mehrere Invariante zeigen.

Terminierung von Schleifen

Die **Terminierung einer Schleife muss separat nachgewiesen werden**.

solange B wiederhole S

1. Gib einen **ganzzahligen Ausdruck E** an über Variablen, die in der Schleife vorkommen, und zeige, dass E bei jeder Iteration durch S **verkleinert** wird.
2. Zeige, dass **E nach unten begrenzt** ist, z. B. dass $0 \leq E$ eine Invariante der Schleife ist.

Es kann auch eine andere Grenze als 0 gewählt werden.

E kann auch monoton **vergrößert werden und nach oben begrenzt** sein.

Nichtterminierung wird bewiesen, indem man zeigt,
dass $R \wedge B$ eine Invariante der Schleife ist und
dass es eine Eingabe gibt, so dass $R \wedge B$ vor der Schleife gilt.
R kann einen speziellen Zustand charakterisieren, in dem die Schleife nicht anhält.

Es gibt Schleifen, für die man **nicht entscheiden** kann,
ob sie für jede Vorbedingung **terminieren**.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 317

Ziele:

Terminierungsnachweis verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu den Schritten.
- Der Ausdruck E braucht selbst nicht in der Schleife vorzukommen.
- Beispiele dazu.

Beispiele zur Terminierung

1. { a > 0 $\wedge$ b > 0} — terminiert

```
Schleife1   solange a ≠ b wiederhole
Schleife2       solange a > b wiederhole
                    a := a - b;
Schleife3       solange a < b wiederhole
                    b := b - a
```

2. { a > 0 $\wedge$ b > 0} — terminiert nicht immer

```
Schleife1   solange a ≠ b wiederhole
Schleife2       solange a ≥ b wiederhole
                    a := a - b;
Schleife3       solange a < b wiederhole
                    b := b - a
```

3. { n $\in \mathbb{N} \wedge$ n > 1 } — Terminierung ist unbewiesen

```
solange n > 1 wiederhole
        falls n gerade:
                n := n / 2
        sonst   n := 3 * n + 1
```


Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 317a

Ziele:

Terminierungsnachweis üben

in der Vorlesung:

- 1 und 2 durch geeignete Invariante begründen
- 3 wird nicht versucht, zu entscheiden

Denksportaufgabe zu Invarianten

In einem Topf seien s schwarze und w weiße Kugeln, s + w > 0

solange mindestens 2 Kugeln im Topf sind

nimm 2 beliebige Kugeln heraus

falls sie gleiche Farbe haben:

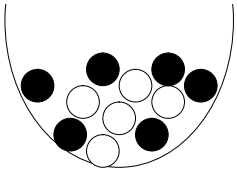
wirf beide weg und

lege eine neue schwarze Kugel in den Topf

falls sie verschiedene Farben haben:

lege die weiße Kugel zurück in den Topf und

wirf die schwarze Kugel weg



Welche Farbe hat die letzte Kugel?

Finden Sie Invarianten, die die Frage beantworten.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 318

Ziele:

Passende Invarianten finden

in der Vorlesung:

Lösung erfragen.

Schrittweise Konstruktion und Verifikation

Vorbedingung: $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

Nachbedingung: $q = x^n$

Konstruktionsidee:

Invariante INV: $x^n = q * a^i \wedge i \geq 0$

Zielbedingung: $i \leq 0$

falls i gerade: $x^n = q * (a^2)^{i/2}$

falls i ungerade: $x^n = q * a * (a^2)^{i/2}$

Algorithmus:

$\{ n \geq 0 \} \rightarrow \{ n = n \wedge n \geq 0 \wedge x = x \wedge 1 = 1 \}$

```
a := x; q := 1; i := n;
```

$\{ i = n \wedge i \geq 0 \wedge a = x \wedge q = 1 \} \rightarrow \{ INV \}$

```
solange i > 0 wiederhole
```

$\{ INV \wedge i > 0 \}$

```
falls i ungerade:
```

$\{ INV \wedge i > 0 \wedge i \text{ ungerade} \} \rightarrow$

$\{ x^n = q * a * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$ `q := q * a;` $\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$

leere Alternative für i gerade:

$\{ INV \wedge i > 0 \wedge i \text{ gerade} \} \rightarrow \{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$

$\{ x^n = q * (a^2)^{i/2} \wedge i > 0 \}$

```
a := a * a;
```

$\{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i > 0 \} \rightarrow \{ x^n = q * a^{i/2} \wedge i/2 \geq 0 \}$

```
i := i / 2
```

$\{ x^n = q * a^i \wedge i \geq 0 \} \equiv \{ INV \}$

$\{ INV \wedge i \leq 0 \} \rightarrow \{ q = x^n \}$

Terminierung der Schleife: i fällt monoton und $i \geq 0$ ist invariant.

Schritte:

1. Vor-, Nachbedingung
2. Schleifeninvariante
3. Schleife mit INV
4. Initialisierung
5. Idee für Schleifenrumpf
6. Alternative
7. Schleife komplett
8. Terminierung

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 319

Ziele:

Entwicklung eines vollständigen Beispiels

in der Vorlesung:

Erläuterung der einzelnen Schritte.

In den Dateien verifikation.ps und verifikation.pdf findet man die schrittweise Entwicklung des Inhaltes der Folie.