3.3 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen**, **Variablen**, **Junktoren.**
Zusätzliche Konzepte:

- **n-stellige Prädikate**
  z. B. „x ist eine Katze" bzw. als Formel: istKatze(x)
  teilt(a,b), größterGemeinsamerTeiler(a, b, g)
  Die Parameter werden aus einem Wertebereich gewählt.
  Prädikate haben einen Wahrheitswert.
- **Terme als Parameter von Prädikaten**:
  z. B. gleichwertig (**x + y**, **y + x**)
- **Quantoren** „**für alle x gilt P(x)**" und „**es gibt ein x, so dass P(x) gilt**"
  in Symbolen: $\forall$**xP(x)** bzw. $\exists$**xP(x)**
  Beispiel: $\forall$x (esIstNacht $\wedge$ istKatze(x) $\rightarrow$ istGrau(x));
  in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau."

Schon **zur Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte **der Prädikatenlogik**:

z. B. größter gemeinsamer Teiler:

gegeben: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

gesucht: größter gemeinsamer Teiler g von a und b, d. h.
teilt(g, a) $\wedge$ teilt(g, b) $\wedge$ ($\forall$h (teilt(h, a) $\wedge$ teilt(h, b) $\rightarrow$ h $\leq$ g))

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 320

Ziele:

Motivation der Prädikatenlogik

in der Vorlesung:

- Parametrisierung von Aussagen verdeutlichen
- Prädikate und Relationen
- Quantoren intuitiv
- Einsatz in der Modellierung

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

Warum kann man einfache Aufgaben für algorithmische Berechnungen nicht mit Aussagenlogik modellieren?

Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik
  Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar**: wie in Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 321

Ziele:

Übersicht

in der Vorlesung:

Vergleich mit Aussagenlogik

Prädikatenlogische Formeln

Prädikatenlogische Formeln werden induktiv wie folgt definiert:

1. **atomare Formeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form **P (t_1, ..., t_n)**
   Dabei ist P ein n-stelliges Prädikatsymbol und
   die t_i sind Terme mit Variablen zu einer Signatur Σ
   (0-stellige Prädikatsymbole entsprechen den atomaren Aussagen der Aussagenlogik.)

2. **logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\neg F \quad F \wedge G \quad F \vee G \quad F \rightarrow G \quad F \leftrightarrow G$
   aus prädikatenlogische Formeln F und G

3. der **Allquantor** $\forall$ und der **Existenzquantor** $\exists$ bilden prädikatenlogische Formeln:
   $\forall x\ F$ und $\exists x\ F$
   aus der prädikatenlogischen Formel F und definieren die Variable x

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

Beispiel:

$$\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h\ (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow h \leq g))$$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 322

Ziele:

Notation und Struktur

in der Vorlesung:

- Beispiele
- Struktur an Bäumen erläutern
- Signatur explizit machen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Zeigen Sie, dass die Formeln auf Folie Mod-3.20 syntaktisch korrekt sind.
- Zu welchen Signaturen gehören ihre Terme?

Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur Σ wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe**: **Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 322a

Ziele:

PL Formeln in der Praxis

in der Vorlesung:

- Anmerkungen erläutern
- PL erster Stufe abgrenzen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Gebundene Variable

Ein Quantor $\forall x\ F$ oder $\exists x\ F$ **bindet alle Vorkommen des Variablennamens x** in der Formel F, außer den Vorkommen von x die durch einen weiteren Quantor innerhalb von F gebunden sind.

x ist der **Name der Variablen des Quantors**.

F ist der der **Wirkungsbereich des Quantors**.

Beispiel: $\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \lor \exists y\ (P(y) \land \forall z\ R(y, z))$

Quantoren mit ihrenWirkungsbereichen

Anmerkungen:

- Eine Variable hat einen Namen, z. B. x.
- Mehrere verschiedene Variable können denselben Namen haben.
- Ein Quantor führt eine Variable ein, z. B. $\forall x\ F$.
  Ihr Name kann im Wirkungsbereich (auch mehrfach) vorkommen.
- Wirkungsbereiche von Quantoren können geschachtelt sein,
  sogar mit (verschiedenen) Variablen, die dieselben Namen haben.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 323

Ziele:

Bindung von Namen verstehen

in der Vorlesung:

- Wirkungsbereiche erläutern, und an Bäumen zeigen
- Variablendefinition und ihre Anwendungen
- Unterschied: Variable, ihr Name, dessen Vorkommen in einer Formel
- Vergleich mit Variablendeklarationen in Programmen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Freie Variable

Ein Vorkommen eines Variablennamens y heißt **frei in der Formel F**,
wenn es **nicht im Wirkungsbereich eines Quantors für y** liegt.
y ist dann der Name einer **freien Variablen** der Formel F.

Beispiel: Formel F

$$x < 0 \wedge \exists y\ (P(y, \underset{\uparrow}{x}) \vee Q(y, \underset{\uparrow}{z}))$$

freie Vorkommen

F hat 2 freie Variable. Sie haben die Namen x und z.

Freie Variable werden **außerhalb der Formel gebunden** und mit Werten belegt.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 323a

Ziele:

Freie Variable erkennen

in der Vorlesung:

- Variable sind frei in Bezug auf eine (Teil-)Formel,
- weiter außen werden sie an eine Bedeutung gebunden.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Umbenennung von Variablen

In einer Formel können mehrere Vorkommen von Quantoren **verschiedene Variable mit gleichem Namen** einführen und in ihrem Wirkungsbereich binden:

Beispiele:

$$\forall y\ (\exists x\ R(x, y) \wedge \exists x\ Q(x, y)) \qquad \forall x\ \forall y\ (P(x, y) \wedge \exists x\ R(x, y))$$

Umbenennung: In einer Formel kann man **alle Vorkommen des Namens x einer Variablen durch einen neuen Namen z ersetzen**, der sonst nicht in der Formel vorkommt. Die Bedeutung der Formel ändert sich dadurch nicht.

Beispiele von oben:

$$\forall y\ (\exists x\ R(x, y) \wedge \exists z\ Q(z, y)) \qquad \forall x\ \forall y\ (P(x, y) \wedge \exists z\ R(z, y))$$

Damit kann man erreichen, dass **verschiedene Variable verschiedene Namen** haben.

Wir sagen dann: Die Variablen der Formel sind **konsistent umbenannt**.

Formeln, in denen alle Variablen verschiedene Namen haben sind meist besser lesbar.

Manche Definitionen sind einfacher für konsistent umbenannte Formeln.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 324

Ziele:

Konsistente Umbenennung verstehen

in der Vorlesung:

- Anwendungen ihren Definitionen zuordnen.
- Wenn in geschachtelten Wirkungsbereichen die Variablen der Quantoren dieselben Namen haben, dann ist im inneren Wirkungsbereich die äußere Variable verdeckt.
- Konsistente Umbenennung beachtet Bindungen, Substitution von Variablen aber nicht.
- Vergleich mit Programmiersprachen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Geben Sie ein Beispiel, wo eine unzulässige Umbenennung in einen schon verwendeten Variablennamen Bindungen verändert.

Interpretation zu prädikatenlogischer Formel

Einer prädikatenlogischen Formel F wird durch eine **Interpretation** $\mathfrak{I}$ (F) **Bedeutung zugeordnet,** sodass man ihren Wahrheitswert (w oder f) berechnen kann.

Eine **Interpretation** $\mathfrak{I}$ wird bestimmt durch

- einen **Individuenbereich U,** der nicht leer ist (auch Universum genannt). Aus U stammen die Werte der Variablen und Terme.
- eine **Abbildung der Funktions- und Prädikatsymbole** einer Signatur Σ auf dazu passende konkrete Funktionen und Prädikate, notiert z. B. $\mathfrak{I}$(f), $\mathfrak{I}$(P)
- eine **Belegung der freien Variablen mit Werten aus U**, notiert z. B. $\mathfrak{I}$(x)

Bemerkungen:

- In der Prädikatenlogik enthält der **Individuenbereich U alle Individuen - auch verschiedenartige** - die für die Interpretation benötigt werden. Er ist **nicht in Wertebereiche gleichartiger Individuen** strukturiert (wie in Kapitel 2).
- **Jede Sorte aus** Σ wird deshalb **auf den ganzen Individuenbereich U** abgebildet.
- Eine **Interpretation** wird immer **passend zu einer Menge prädikatenlogischer Formeln** definiert. Nur darin vorkommende Funktionen, Prädikate und Variable interessieren.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 325

Ziele:

Interpretation als Zuordnung verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele für Individuenbereiche U
- Vergleich mit Wertebereichen aus Abschnitt 2
- Beispiel von Mod-3.26

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel F = $\forall x\ P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$ ist folgendes $\Im$ eine passende Interpretation:

U := $\mathbb{N}_0$

$\Im$(P) := { (m, n) | m, n $\in$ U und m < n }

$\Im$(Q) := { n | n $\in$ U und n ist Primzahl }

$\Im$(f) ist die Nachfolgerfunktion auf U, also $\Im$(f)(n) = n + 1

$\Im$(g) ist die Additionsfunktion auf U also $\Im$(g)(m, n) = m + n

$\Im$(a) := 2 (a ist eine Konstante)

$\Im$(z) := 3 (z ist eine freie Variable)

Bemerkungen:

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von $\Im$ zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten.

Das Beispiel stammt aus
U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 326

Ziele:

Konkretes Beispiel verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiel erläutern
- Andere Funktionen einsetzen

Verständnisfragen:

Variieren Sie das Beispiel mit anderen Funktionen und Prädikaten.

Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei F eine prädikatenlogische Formel und $\Im$ eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert $\Im$(F),** indem man $\Im$ **rekursiv anwendet** auf die Teile von F:

- die **Prädikatsymbole und deren Parameterterme**,
- die **Funktionssymbole und deren Operandenterme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

Die **Berechnung von Quantor-Formeln** ist definiert durch:

$\Im(\forall x\ G) = w$ genau dann, wenn **für jeden Wert d $\in$ U** gilt $\Im_{[x/d]}(G) = w$

$\Im(\exists x\ G) = w$ genau dann, wenn es **einen Wert d $\in$ U** gibt mit $\Im_{[x/d]}(G) = w$

Dabei ordnet $\Im_{[x/d]}$ (G) in G der Variablen x den Wert d zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretetion $\Im$ überein.
Jeder Wert aus U wird also an die Variable des Quantors gebunden, damit die Quantor-Formel ausgerechnet und die Ergebnisse mit $\wedge$ bei $\forall$ und mit $\vee$ bei $\exists$ verknüpft.

Wir nehmen an, dass alle Variablen in F verschiedene Namen haben (konsistent umbenannt). Dann betrifft $\Im_{[x/d]}$ nur die Variable des gerade betrachteten Quantors und keine andere.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 327

Ziele:

Interpretation anwenden

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation aus Mod-3.26 für Terme zeigen
- Beispiel auf Mod-3.26 erläutern
- Verschiedene Interpretationen für dieselbe Formel

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Beispiel für Interpretation einer Formel

Formel F:

$z \wedge \forall x\ \forall y\ P(x, y)$

Interpretation $\Im$:

$U = \{ 1, 2, 3 \}$

$\Im(P) = \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$

$\Im(z) = w$

Berechnung der Quantor-Formel: (aufzählen nur bei kleinem U praktikabel)

$\Im(\forall x$	$\forall y$	$P(x, y))$
1	1	w
1	2	w
1	3	w
2	1	w
2	2	w
2	3	w
3	1	w
3	2	w
3	3	w

also ist $\Im(\forall x\ \forall y\ P(x, y)) = w$

Interpretation $\Im$ rekursiv angewandt:

$\Im(z \wedge \forall x\ \forall y\ P(x, y)) =$

$\Im(\Im(z) \wedge \Im(\forall x\ \forall y\ P(x, y))) =$

$\Im(z)$ und $\Im(\forall x\ \forall y\ \Im_{[x/d,\ y/e]}(P)\ (\Im_{[x/d,\ y/e]}(x), \Im_{[x/d,\ y/e]}(y)))$

w und w (siehe Quantor-Formel)

w

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 328a

Ziele:

Beispiel zu Mod-3.27

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Beschränkung von Wertebereichen

In der **Modellierung** soll man die **Wertebereich**e der Variablen präzise angeben.
In der **Prädikatenlogik** können jedoch die **Variablen der Quantoren Werte** aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen.
Deshalb müssen **Einschränkung explizit als Prädikat** formuliert werden.

Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation $\rightarrow$:

„für alle $m \in M \subseteq U$ gilt P(m)“:

	ausführliche Notation:	abkürzende Notation:
allgemein:	$\forall m\ (m \in M \rightarrow P(m))$	$\forall m \in M\colon P(m)$
Beispiele:	$\forall i\ (i \in \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow b_i = a_i^2)$	$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}\colon b_i = a_i^2$
	$\forall k\ (k \in \mathbb{N} \rightarrow a + k \geq a)$	$\forall k \in \mathbb{N}\colon a + k \geq a$

Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion $\wedge$:

„es gibt ein $m \in M \subseteq U$, so dass P(m) gilt“:

allgemein:	$\exists m\ (m \in M \wedge P(m))$	$\exists m \in M\colon P(m)$
Beispiele:	$\exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge a * k = b)$	$\exists k \in \mathbb{N}\colon a * k = b$
	$\exists i\ (i \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge a_i = x)$	$\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}\colon a_i = x$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 329

Ziele:

Prädikate präzisieren Wertebereiche

in der Vorlesung:

- Begründung der Implikation und der Konjunktion
- Erläuterung der Beispiele

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Beispiel für prädikatenlogische Formeln (1)

Relationen $R \subseteq M \times M$ **ist reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$ (siehe Mod-2.10)

als Prädikat, abgekürzt: reflexiv(R): $R \subseteq M \times M \wedge \forall x \in M\colon (x, x) \in R$

als PL Formel, ausführlich: $R \subseteq M \times M \wedge \forall x\, (x \in M \rightarrow (x, x) \in R)$

Eine **ausführliche Interpretation**:

$\Im(\subseteq)$:= 2-stelliges Prädikat: „ist Teilmenge von“
$\Im(\in)$:= 2-stelliges Prädikat: „ist Element von“
$\Im((,))$:= 2-stellige Funktion: „bilde Paar aus“
U := { 1, 2, 3, 4 } *Individuenbereich*
$\Im(M)$:= { 1, 2, 3 } *Beispiel für M*
$\Im(R)$:= { (1, 1), (2, 2), (3, 3) } *Beispiel für R*

Wahrheitswert bestimmen: $R \subseteq M \times M \wedge \forall x\, (x \in M \rightarrow (x, x) \in R)$

w		1	w	w	w
w		2	w	w	w
w		3	w	w	w
w		4	f	w	
w	$\wedge$			w	

Die Relation R ist reflexiv.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 329x

Ziele:

PL-Formel mit ausführlicher Interpretation

in der Vorlesung:

Erläuterung der Schritte

Verständnisfragen:

Wiederholen Sie die Definition der Interpretation an diesem Beispiel.

Beispiele für prädikatenlogische Formeln (2)

- Die Relation $R \subseteq M \times M$ **ist symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $x\ R\ y$ folgt $y\ R\ x$

  symmetrisch(R): $R \subseteq M \times M \wedge \forall x\ (x \in M \rightarrow \forall y\ (y \in M \rightarrow ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)))$

  abgekürzt: $R \subseteq M \times M \wedge \forall x \in M: \forall y \in M: (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

- Die Variablen in Axiomen abstrakter Algebren sind durch Allquantoren gebunden (Mod-2.27):

  K3: $pop\ (push\ (k, t)) \equiv k$

  gebunden: K3: $\forall k\ (k \in Keller \rightarrow \forall t\ (t \in Element \rightarrow pop\ (push\ (k, t)) \equiv k))$

  abgekürzt: K3: $\forall k \in Keller: \forall t \in Element: pop\ (push\ (k, t)) \equiv k$

- Prädikat „kleinstes Element einer Menge“:

  istKleinstes (k, M): $k \in M \wedge \forall i\ (i \in M \rightarrow k \leq i)$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 330

Ziele:

Prädikatenlogik lesen lernen

in der Vorlesung:

- Erläuterung der Beispiele
- Formalisierung der Axiome

Beispiele für prädikatenlogische Formeln (3)

- aus der Analysis:
  Eine Folge f(n) heißt konvergent mit dem Grenzwert a, wenn gilt

  $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall\, n \in \mathbb{N}: n > n_\varepsilon \rightarrow |\, f(n) - a \,| < \varepsilon$

  dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!

- aus der Informatik:
  Eine Folge $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^+$ heißt (nicht fallend) geordnet, wenn gilt

  $\forall\, i \in \{1, ..., n\}: \forall\, j \in \{1, ..., n\}: i \leq j \rightarrow a_\mathbf{i} \leq a_\mathbf{j}$

- Was bedeutet folgende Aufgabenstellung?

  gegeben: Eine Folge $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{N}^+$

  gesucht: $p \in Pos = \{1, ..., n\}$, so dass $\forall\, j \in Pos: a_\mathbf{p} \leq a_\mathbf{j} \wedge (a_\mathbf{p} = a_\mathbf{j} \rightarrow p \leq j)$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 330a

Ziele:

Weitere konkrete Beispiele

in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu

Verständnisfragen:

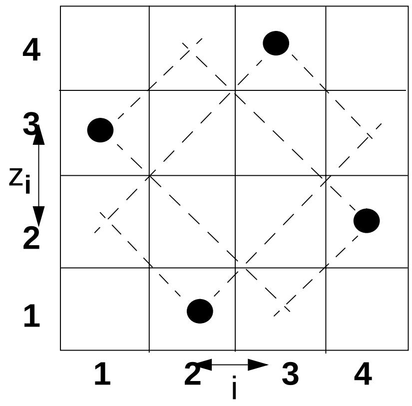
Gibt es zum letzten Beispiel

- immer eine Antwort,
- ist sie immer eindeutig bestimmt?

Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

gegeben:
Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ eines n * n Schachbrettes

gesucht:
Menge P zulässiger Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:



Sei Index := {1, ..., n}

$P := \{ p \mid p = (z_1, ..., z_n) \in \text{Index}^n \wedge \text{zulässig}(p) \}$

z_i gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte i an.

Dabei bedeutet
zulässig (p): $\forall\, i \in \text{Index}: \forall\, j \in \text{Index}: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge |\, z_i - z_j \,| \neq |\, i - j \,|$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 330b

Ziele:

Spezifikation einer Aufgabe

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.
Aber: Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.
Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**" und „**allgemeingültig**" für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation $\mathfrak{I}$(F) = w gilt, heißt $\mathfrak{I}$ auch ein **Modell der Formel F.**
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, so dass gilt $\mathfrak{I}$(F) = w, sonst ist sie **unerfüllbar** (**widerspruchsvoll**).
- Eine Formel F heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von F gilt $\mathfrak{I}$ (F) = w.
- Eine Formel F ist genau dann **allgemeingültig, wenn** $\neg$ **F unerfüllbar** ist.
- Zwei Formeln F und G sind **logisch äquivalent**, wenn sie für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ dasselbe Ergebnis haben: $\mathfrak{I}$(F) = $\mathfrak{I}$(G)
- Sei A eine Menge von Formeln und F eine Formel.
  Wenn für **alle Interpretationen** $\mathfrak{I}$, die alle Formeln in A erfüllen, auch $\mathfrak{I}$ (F) gilt,
  dann sagen wir **„F folgt semantisch aus A"** bzw. **A |= F**;
  A |= F heißt auch **logischer Schluss**.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 331

Ziele:

Analoge Begriffe wie in der Aussagenlogik

in der Vorlesung:

- gleiche Definition der Begriffe
- Interpretation unterscheidet sich von der in der Aussagenlogik
- Die Menge der Interpretationen kann i.a. nicht überprüft werden.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien F und G beliebige prädikatenlogische Formel. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

1. **Negation:**

   $\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F$ $\qquad$ $\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F$

2. **Wirkungsbereich der Quantoren verändern:**
   Falls x in G nicht frei vorkommt, gilt

   $(\forall x\ F \wedge G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$ $\qquad$ $(\forall x\ F \vee G) \equiv \forall x\ (F \vee G)$

   $(\exists x\ F \wedge G) \equiv \exists x\ (F \wedge G)$ $\qquad$ $(\exists x\ F \vee G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$

   $G \equiv \exists x\ G$ $\qquad$ $G \equiv \forall x\ G$

3. **Quantoren zusammenfassen:**

   $(\forall x\ F \wedge \forall x\ G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$ $\qquad$ $(\exists x\ F \vee \exists x\ G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$

   Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:
   $(\forall x\ F \vee \forall x\ G) \not\equiv \forall x\ (F \vee G)$ $\qquad$ $(\exists x\ F \wedge \exists x\ G) \not\equiv \exists x\ (F \wedge G)$

4. **Quantoren vertauschen:**

   $\forall x\ \forall y\ F \equiv \forall y\ \forall x\ F$ $\qquad$ $\exists x\ \exists y\ F \equiv \exists y\ \exists x\ F$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 332

Ziele:

Wichtige Äquivalenzen einprägen

in der Vorlesung:

- 1 - 4 begründen
- Eine Äquivalenz beweisen
- Beispiel für Umformungen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Beispiele für Äquivalenzen

1. **Negation**: formal

	Alle haben den Schuss gehört.	$\forall x$ gehört(x)
negiert:	Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\exists x \neg$ gehört(x)
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg$ gehört(x)

$\neg\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10 \equiv$

$\neg\forall i\ (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10) \equiv$

$\exists i\ \neg(\neg\ i \in \text{Ind} \vee a_i < 10) \equiv$

$\exists i\ (\ i \in \text{Ind} \wedge \neg\ a_i < 10) \equiv$

$\exists i \in \text{Ind}: a_i \geq 10$

$(\exists\ x\ P(x)) \rightarrow P(y) \equiv$

$\neg(\exists\ x\ P(x)) \vee P(y) \equiv$

$(\forall\ x\ \neg P(x)) \vee P(y) \equiv$

$\forall\ x\ (\neg P(x) \vee P(y)) \equiv$

$\forall\ x\ (P(x) \rightarrow P(y))$

3. **Zusammenfassung von Quantoren**:

$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \wedge (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i) \equiv\ \forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$

nicht äquivalent:

$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \vee (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i) \not\equiv\ \forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 332a

Ziele:

Beispiele für Mod-3.32

in der Vorlesung:

- Schrittweise umformen
- weitere Beispiele

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 4.2

Beispiel für Umformungen

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

	$(\underline{\neg(\exists x\, P(x, y) \vee \forall z\, Q(z))} \wedge \exists w\, P(f(a, w)))$	DeMorgan
$\equiv$	$((\underline{\neg\exists x\, P(x, y)} \wedge \underline{\neg\forall z\, Q(z)}) \wedge \exists w\, P(f(a, w)))$	Negation von Quantorformeln (1.)
$\equiv$	$((\forall x\, \neg P(x, y) \wedge \exists z\, \neg Q(z)) \underline{\wedge} \exists w\, P(f(a, w)))$	Kommutativität
$\equiv$	$(\underline{\exists w\, P(f(a, w))} \wedge (\underline{\forall x\, \neg P(x, y)} \wedge \exists z\, \neg Q(z)))$	Wirkungsbereiche ausweiten (2.)
$\equiv$	$\exists w\, (P(f(a, w)) \underline{\wedge} \forall x\, (\neg P(x, y) \underline{\wedge} \exists z\, \neg Q(z)))$	Kommutativität
$\equiv$	$\exists w\, (\forall x\, (\underline{\exists z\, \neg Q(z)} \wedge \neg P(x, y)) \wedge P(f(a, w)))$	Wirkungsbereiche ausweiten (2.)
$\equiv$	$\exists w\, (\underline{\forall x\, \exists z\, (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y))} \wedge P(f(a, w)))$	Wirkungsbereiche ausweiten (2.)
$\equiv$	$\underline{\mathbf{\exists w\, \forall x\, \exists z}}\, (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge P(f(a, w)))$	

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

Jede prädikatenlogische Formel kann durch Anwenden der Äquivalenzen und Umbenennung von Variablen in die Form gebracht werden $Q_1x_1\, Q_2x_2\, ...\, Q_nx_n\, F$ (**Pränexform**) wobei Q_i Quantoren sind und F keine Quantoren enthält.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 332b

Ziele:

Äquivalenzen anwenden

in der Vorlesung:

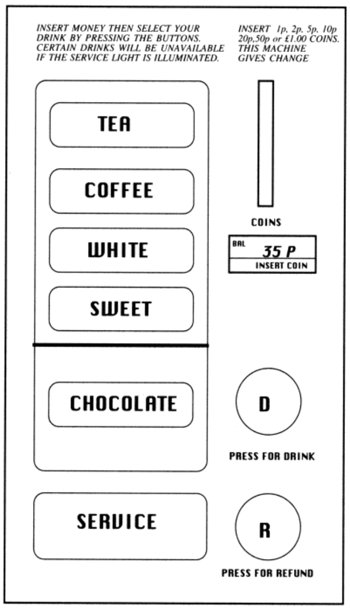
Erläuterungen dazu

Anwendungsstellen zeigen,

Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationssprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet Prädikatenlogik.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine“ aus
Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff



Get_Drink

$\Delta Abs\_State\_Machine$
$choice? : \mathbb{P} Selection\_buttons$
$d! : Drink$
$Change! : \text{bag } British\_coin$

$choice? \in Drink$
$Value\ Balance \geq Prices\ choice?$
$\forall i : Recipe\ choice? \bullet count\ Stock\ i > 0$
$Cups > 0$
$\exists b : bag\ British\_coins \bullet (b \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ b + Prices\ choice?)$
$Balance' = [\![\ ]\!]$
$Stock' \uplus \{i : Recipe\ choice? \bullet i \mapsto 1\} = Stock$
$Cups' = Cups - 1$
$Change! \sqsubseteq Takings \land Value\ Balance = Value\ Change! + Prices\ choice?$
$Takings' \uplus Change! = Takings$
$Prices' = Prices$
$Service\_light' = Service\_light$
$Report\_display' = insert\ coin$
$d! = choice?$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 333

Ziele:

Ausschnitt aus einem größeren Beispiel

in der Vorlesung:

Erläuterungen zur

- Sprache Z,
- zur gestellten Aufgabe,
- zum Ausschnit aus der Spezifikation