4. Modellierung mit Graphen

Modellierung beschreibt **Objekte und Beziehungen** zwischen ihnen.

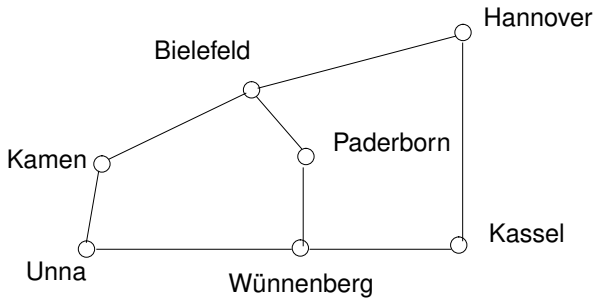
Graphen eignen sich zur Modellierung für ein **breites Aufgabenspektrum**.

Ein **Graph** ist eine Abstraktion aus Knoten und Kanten:

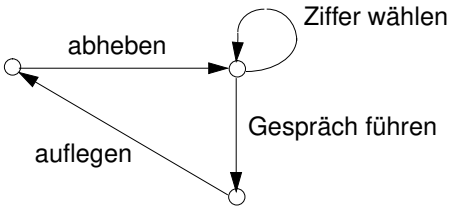
- **Knoten**: Eine Menge gleichartiger Objekte
- **Kanten**: Beziehung zwischen je zwei Objekten, 2-stellige Relation über Knoten

Je nach Aufgabenstellung werden **ungerichtete oder gerichtete** Graphen verwendet.

ungerichtet



gerichtet



Beschränkung auf **endliche Knotenmengen** und **2-stellige** Relation reicht hier aus.

© 2000 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 401

Ziele:

Intuitives Verständnis von Graphen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe und Beispiele

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Verständnisfragen:

Geben Sie weitere Beispiele für Graphen an.

Themenübersicht

4.1 Grundlegende Definitionen
gerichteter, ungerichteter Graph, Graphdarstellungen,
Teilgraphen, Grad, Markierungen

4.2 Wegeprobleme
Weg, Kreis, Rundwege, Zusammenhang

4.3 Verbindungsprobleme
Spannbaum

4.4 Modellierung mit Bäumen
gewurzelte Bäume, Entscheidungsbäume, Strukturbäume, Kantorowitsch-Bäume

4.5 Zuordnungsprobleme
konfliktfreie Markierung, bipartite Graphen

4.6 Abhängigkeitsprobleme
Anordnungen, Abfolgen

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 402

Ziele:

Vielfalt der Anwendungen von Graphen

in der Vorlesung:

- Eindruck der Aufgabenbereiche vermitteln,
- Beispiele skizzieren,
- gerichtete und ungerichtete Graphen zuordnen.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

4.1 Grundlegende Definitionen
Gerichteter Graph

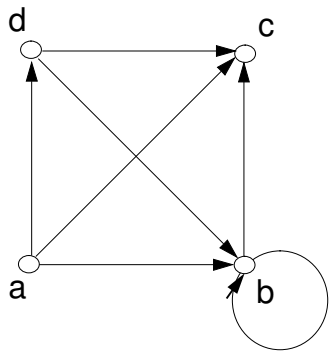
Ein **gerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E gerichteter Kanten**, mit $E \subseteq V \times V$.

Die Kantenmenge E ist eine **2-stellige Relation** über V.

Beispiel:

V = {a, b, c, d}

E = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (d, b), (d, c)}



Eine Kante wird als (v, u) oder v -> u notiert.

Eine Kante (v, v) heißt **Schleife** oder Schlinge.

Die Definition von Graphen schränkt ein auf

- endliche Graphen mit **endlichen Knotenmengen**,
- einfache Kanten: eine **Kante verbindet nicht mehr als 2 Knoten**, **zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante**

Multigraph: Es kann mehr als eine Kante zwischen denselben Knoten geben (siehe Mod-4.7)

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 403

Ziele:

Gerichteten Graph als Relation verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterung der Begriffe.

Synonyme:

- Knoten: auch Ecke, engl. vertex
- Kante: engl. edge
- gerichtete Kante: engl. arc

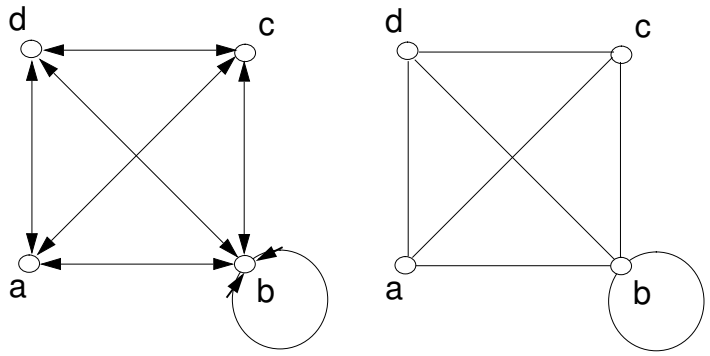
nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Ungerichteter Graph

Ist die **Kantenmenge** E eines gerichteten Graphen eine **symmetrische Relation**, so beschreibt er einen **ungerichteten Graphen**:
Zu jeder Kante x -> y aus E gibt es auch y -> x in E.

Wir fassen zwei Kanten x -> y, y -> x zu einer **ungerichteten Kante** zusammen:
{x, y} die Menge der Knoten, die die Kante verbindet.



Ungerichtete Graphen werden auch direkt definiert:

Ein **ungerichteter Graph** G = (V, E) hat eine endliche **Menge V von Knoten** und eine **Menge E ungerichteter Kanten, mit E $\subseteq$ { {x, y} | x, y $\in$ V }**

Der abgebildete Graph mit ungerichteten Kanten:
V = {a, b, c, d} E = { {a, b}, {a, c}, {a, d}, { b }, {b, c}, {d, b}, {d, c} }

In dieser Notation ist eine Schleife eine 1-elementige Menge, z. B. { b }

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 404

Ziele:

Zusammenhang zwischen gerichtetem und ungerichtetem Graph

in der Vorlesung:

- Zusammenhang erläutern,
- Definition gegenüberstellen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Darstellung von Graphen

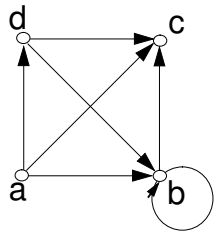
abstrakt:

Knotenmenge V = {a, b, c, d}

Kantenmenge E = {(a, b), (a, c), (a, d),
(b, b), (b, c),
(d, b), (d, c)}

anschaulich:

Graphik



Datenstrukturen für **algorithmische Berechnungen**:

Knotenmenge V als Indexmenge

lineare Ordnung der Knoten definieren

a, b, c, d

sei |V| = n

Adjazenzmatrix AM mit n * n Wahrheitswerten zur Darstellung der (gerichteten) Kanten:

AM(i, j) = (i, j) ∈ E

	a	b	c	d
a	f	w	w	w
b	f	w	w	f
c	f	f	f	f
d	f	w	w	f

Adjazenzlisten: zu jedem Knoten i eine Folge von Knoten, zu denen er eine Kante hat (i, j) ∈ E

a	(b, c, d)
b	(b, c)
c	()
d	(b, c)

Ungerichtete Graphen als gerichtete Graphen mit symmetrischer Kantenmenge darstellen

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 405

Ziele:

Datenstrukturen für Graphen kennenlernen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den beiden Darstellungen

- Adjazenzmatrix: direkter Zugriff aber redundant
- Adjazenzlisten: kompakt aber Suche nach Kanten.

nachlesen:

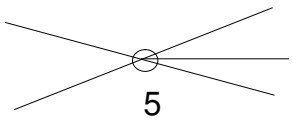
G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Teilgraph, Knotengrad

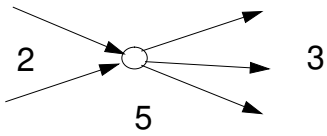
Der Graph G' = (V', E') ist ein **Teilgraph** des Graphen G = (V, E), wenn **V' $\subseteq$ V und E' $\subseteq$ E**. (Gilt für **gerichtete** und **ungerichtete** Graphen.)

Zu einem Graphen G = (V, E) **induziert** eine Teilmenge der Knoten V' $\subseteq$ V den **Teilgraphen** G' = (V', E'), wobei E' alle Kanten aus E enthält, deren Enden in V' liegen.

Sei G = (V, E) ein **ungerichteter** Graph:



Der **Grad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten {x, v}, die in v enden.



Sei G = (V, E) ein **gerichteter** Graph:

Der **Eingangsgrad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten (x, v) $\in$ E, die in v münden.
Der **Ausgangsgrad** eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten (v, x) $\in$ E, die von v ausgehen.
Der **Grad** eines Knotens v ist die Summe seines Eingangs- und Ausgangsgrades.

Der Grad eines gerichteten oder ungerichteten Graphen ist der maximale Grad seiner Knoten.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 406

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele dazu

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Markierte Graphen

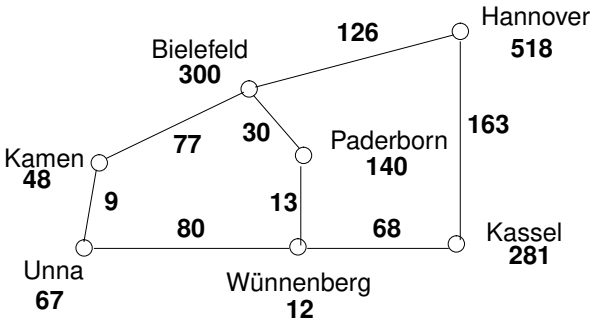
Ein Graph G = (V, E) modelliert eine Menge von Objekten V und die Existenz von Beziehungen zwischen ihnen.

Viele Aufgaben erfordern, dass den **Knoten und/oder den Kanten weitere Informationen** zugeordnet werden.

Dies leisten **Markierungsfunktionen**

Knotenmarkierung MV : V $\rightarrow$ WV,
z.B. Einwohnerzahl: V $\rightarrow \mathbb{N}$

Kantenmarkierung ME : E $\rightarrow$ WE,
z.B. Entfernung: E $\rightarrow \mathbb{N}$



Spezielle Kantenmarkierungen:

Ordnung: E $\rightarrow \mathbb{N}$ legt die **Reihenfolge der Kanten** fest, die von einem Knoten ausgehen (z. B. im Kantorowitsch-Baum von links nach rechts, siehe Mod-2.19)

Anzahl: E $\rightarrow \mathbb{N}$ modelliert **mehrfache Verbindungen zwischen denselben Knoten**; G ist dann ein **Mehrfachgraph (Multigraph)**.
In der graphischen Darstellung schreibt man die Anzahl an die Kante oder zeichnet mehrere Kanten.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 407

Ziele:

Markierungen verstehen

in der Vorlesung:

Begriffe und Beispiele erläutern

nachlesen:

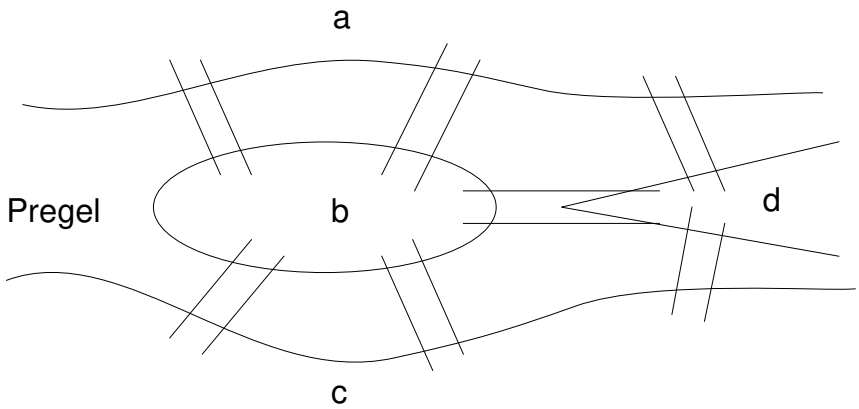
G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Verständnisfragen:

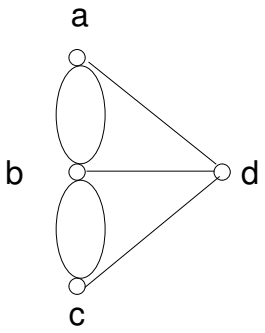
Geben Sie weitere Beispiel für Markierungen

4.2 Wegeprobleme

Beispiel: Königsberger Brückenproblem (Euler, 1736)



Skizze von Königsberg



Multigraph dazu

a. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

b. Gibt es einen Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal überquert?

© 2000 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 408

Ziele:

Berühmtes Modellierungsbeispiel

in der Vorlesung:

- Modellierung zeigen
- Lösung erarbeiten

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Verständnisfragen:

Hinweis:

- a: Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Grad der Knoten auf solch einem Rundweg.
- b: Für die Knoten, die nicht Endpunkte sind, gilt das Gleiche wie in (a).

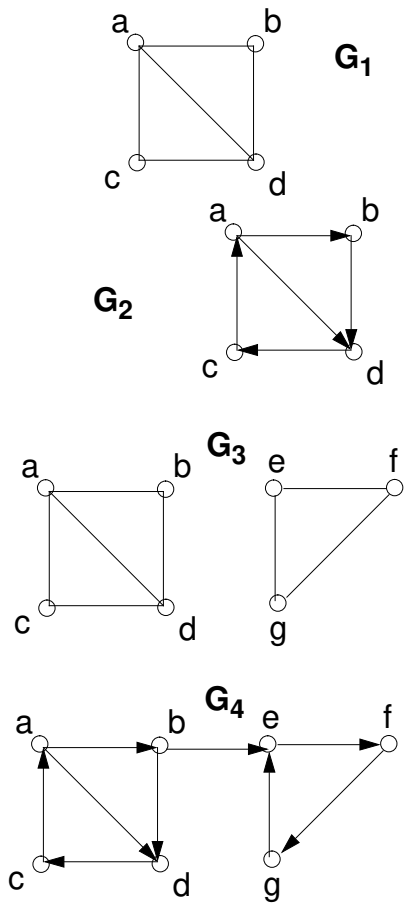
Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter Graph.
Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, ..., v_n)$ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ heißt ein **Weg von v_0 nach v_n**. Er hat die **Länge n** ≥ 0.

Entsprechend für gerichtete Graphen:
mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für i = 1,..., n-1

Ein Weg $(v_0, v_1, ..., v_n)$ einer Länge $n \geq 1$ mit $v_0 = v_n$ und paarweise verschiedenen Kanten $(v_0, v_1), ..., (v_{n-1}, v_n)$ heißt **Kreis im ungerichteten** Graphen und **Zyklus im gerichteten** Graphen.

Ein gerichteter Graph der keinen Zyklus enthält heißt **azyklischer Graph** (engl. **directed acyclic graph, DAG**).



© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 409

Ziele:

Begriffe zu Wegen

in der Vorlesung:

Begriffe an Beispielen erläutern,

Zusammenhang in Graphen

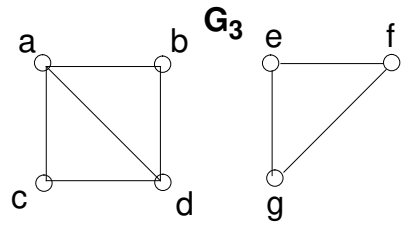
Ein Graph G = (V, E) heißt **zusammenhängend**, wenn es für beliebige Knoten v, w $\in$ V einen Weg von v nach w gibt.

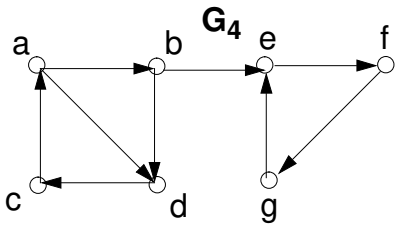
Ein gerichteter Graph heißt unter derselben Bedingung **stark zusammenhängend**.

Ein Teilgraph G' = (V', E') von G = (V, E) heißt **Zusammenhangskomponente**, wenn

- G' **zusammenhängend** ist und wenn
- G keinen anderen zusammenhängenden Teilgraphen G'' hat, der G' als Teilgraph enthält.

Zusammenhangskomponenten sind also **maximale Teilgraphen, die zusammenhängend** sind.





© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 409a

Ziele:

Begriffe verstehen

in der Vorlesung:

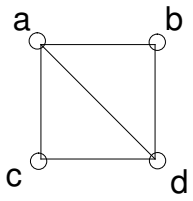
Begriffe an Beispielen erläutern:

- G3 ist nicht zusammenhängend.
- G3 hat 2 Zusammenhangskomponenten.
- Der durch {a,c,d} induzierte Teilgraph ist nicht Zusammenhangskomponente von G3.
- G4 ist nicht stark zusammenhängend.
- G4 hat 2 Zusammenhangskomponenten.

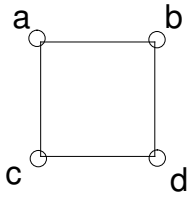
Spezielle Wege und Kreise

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender, schleifenfreier Graph.

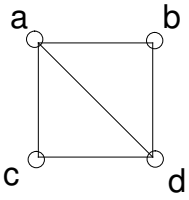
Ein **Euler-Weg** bzw. ein **Euler-Kreis** in G enthält **jede Kante aus E genau einmal**.



(a, b, d, a, c, d)
Euler-Weg



(a, b, d, c, a)
Euler-Kreis



(a, b, d, c, a)
Hamilton-Kreis

G hat einen **Euler-Kreis** genau dann, wenn **alle Knoten geraden Grad** haben.

G hat einen **Euler-Weg**, der kein Kreis ist, genau dann,
wenn G genau **2 Knoten mit ungeradem Grad** hat.

Ein **Hamilton-Kreis** enthält **jeden Knoten aus V genau einmal**.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 410

Ziele:

Wege mit speziellen Eigenschaften

in der Vorlesung:

- Begriffe an Beispielen erläutern,
- Königsberger Brückenproblem lösen

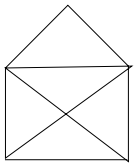
nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

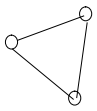
Wegeprobleme mit Euler-Wegen

1. Königsberger Brückenproblem (Mod-4.1):
   Euler-Weg, Euler-Kreis

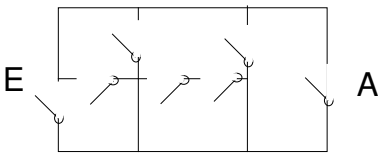
2. Kann man diese Figur in einem Zuge zeichnen?



3. Eine Inselgruppe mit n > 1 Inseln benötigt direkte Schiffsverbindungen zwischen allen Paaren von Inseln. Es gibt nur ein einziges Schiff. Kann es auf einer Tour alle Verbindungen genau einmal abfahren? Für welche n ist das möglich?



4. Planen Sie ein Gruselkabinett:
   Ein Haus mit n > 1 Räumen, 1 Eingangstür, eine Ausgangstür, beliebig vielen Innentüren. Jede Tür schließt nach Durchgehen endgültig. Die Besucher gehen einzeln durch das Haus. Es soll niemand eingesperrt werden.



© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 411

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

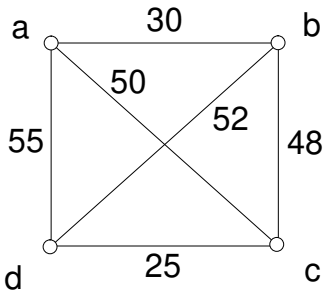
- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Graphen zu den Aufgaben zeigen;
- ihre Eigenschaften erkennen.
- In (4) ist wird jeder Raum und die Umgebung als ein Knoten modelliert.

nachlesen:

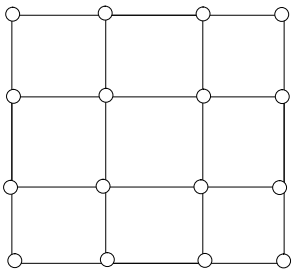
G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Wegeprobleme mit Hamilton-Kreisen

1. Traveling Salesman's Problem (Handlungsreisender): n Städte sind mit Straßen bestimmter Länge verbunden. Gesucht ist eine kürzeste Rundreise durch alle Städte.



2. In einem n * n Gitter von Prozessoren soll eine Botschaft sequentiell von Prozessor zu Prozessor weitergegeben werden. Sie soll jeden Prozessor erreichen und zum Initiator zurückkehren. Für welche n ist das möglich?



© 2000 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 412

Ziele:

Aufgaben modellieren lernen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu den Aufgaben.
- Die Eigenschaften der Graphen erkennen.
- In (1) wird die Entfernung als Kantenmarkierung modelliert.

Allgemeine Hinweise zum Modellieren mit Graphen:

- Rolle der Kanten sorgfältig klären, gerichtet, ungerichtet, markiert.
- Häufig wird der Graph selbst nicht gebraucht, sondern nur bestimmte Eigenschaften, wie Knotengrad.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

4.3 Verbindungsprobleme

Modellierung durch Graphen wie bei Wegeproblemen (4.2), aber hier interessiert
die **Existenz von Verbindungen** (Wegen) zwischen Knoten,
die **Erreichbarkeit** von Knoten,
nicht bestimmte Knotenfolgen.

Sei G = (V, E) ein
ungerichteter, zusammenhängender Graph
für alle folgenden Begriffe:

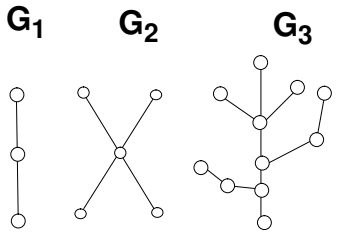
Wenn G **keine Kreise** enthält,
heißt er **(ungerichteter) Baum**.

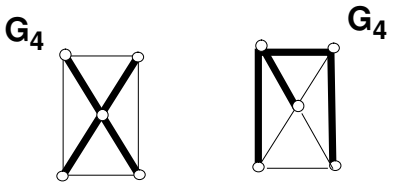
In Bäumen heißen **Knoten mit Grad 1 Blätter**.

Für jeden ungerichteten **Baum** G = (V, E) gilt
| E | = |V| - 1

Ein Teilgraph von G, der jeden Knoten aus V enthält und ein Baum ist, heißt **Spannbaum** zu G.

Bäume





2 Spannbäume zu demselben Graphen G_4

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 413

Ziele:

Begriff Spannbaum verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen und Beispiele zu den Begriffen.

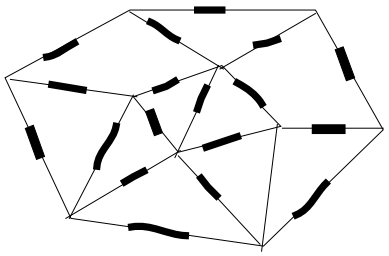
nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

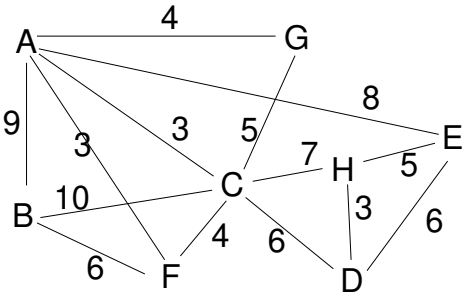
Modellierung mit Spannbäumen zu Graphen

Ein **Spannbaum** ist ein zusammenhängender Teilgraph mit der kleinsten Anzahl Kanten.
Er **modelliert kostengünstigen Zusammenhang**.

1. Aufständische Gefangene wollen eine minimale Anzahl von Gefängnistüren sprengen, so dass alle Gefangenen freikommen:



2. Alle Agenten A, ..., H sollen direkt oder indirekt miteinander kommunizieren. Die Risikofaktoren jeder paarweisen Verbindung sind:



Es soll ein Netz mit geringstem Risiko gefunden werden.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 414

Ziele:

Anwendung von Spannbäumen erkennen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Modellierungen.

- zu 1: Knoten modellieren Räume und Umgebung, Kanten modellieren die Türen.
- zu 2: Graph mit Kantenmarkierung aufstellen; Spannbaum mit minimaler Kantensumme suchen.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

Verbindung und Zusammenhang

Sei G = (V, E) ein ungerichteter, zusammenhängender Graph.

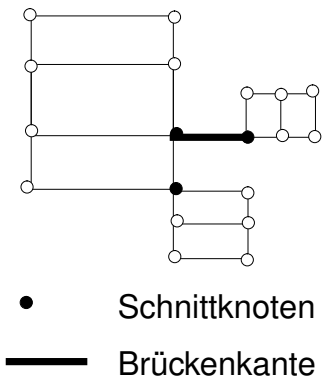
v ist ein **Schnittknoten** in G, wenn G **ohne v nicht mehr zusammenhängend** ist.

e ist eine **Brückenkante** in, wenn G **ohne e nicht mehr zusammenhängend** ist.

G heißt **orientierbar**, wenn man für **jede Kante eine Richtung** so festlegen kann, dass der entstehende **gerichtete Graph stark zusammenhängend** ist.

G ist genau dann **orientierbar**, wenn G **keine Brückenkante** hat.

1. In der Innenstadt sollen zur Hauptverkehrszeit alle Straßen zu Einbahnstraßen werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?
2. In einer Stadt sollen einzelne Straßen zur Reparatur gesperrt werden. Bleiben alle Plätze von überall erreichbar?



© 2000 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 415

Ziele:

Zusammenhang zerstören

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Begriffe und Modellierungen.

zu 1, 2: Gerichtete Brückenkante zerstört den Zusammenhang.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2