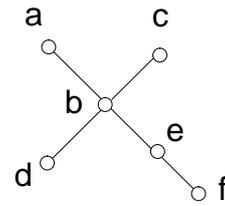


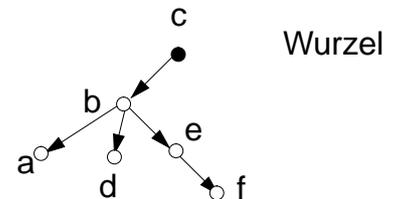
## 4.4 Modellierung mit Bäumen

In einem **ungerichteten Baum** gibt es **zwischen zwei beliebigen Knoten genau einen Weg**.

Ein gerichteter, **azyklischer** Graph  $G$  ist ein **gerichteter Baum**, wenn alle Knoten einen **Eingangsgrad  $\leq 1$**  haben und es genau einen Knoten mit **Eingangsgrad 0 gibt, er ist die Wurzel** von  $G$ .  $G$  ist ein **gewurzelter Baum**.

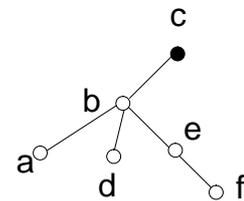


Man kann aus einem **ungerichteten Baum** in eindeutiger Weise einen gerichteten machen, indem man **einen Knoten zur Wurzel bestimmt**.



Deshalb wird in gewurzelter Bäumen häufig die **Kantenrichtung nicht angegeben**.

In einem gewurzelter Baum ist die **Höhe eines Knotens  $v$**  die größte Länge eines Weges von  $v$  zu einem Blatt. Die Höhe der Wurzel heißt **Höhe des Baumes**.



Knoten, die weder Wurzel noch Blatt sind heißen **innere Knoten**.

### Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 416

#### Ziele:

Zusammenhang: ungerichtet, gerichtet, gewurzelt

#### in der Vorlesung:

- Erläuterung der Begriffe an dem Beispiel.
- Andere Wurzeln zum selben ungerichteten Graphen
- Höhen bestimmen.

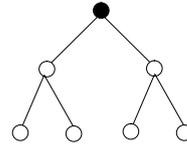
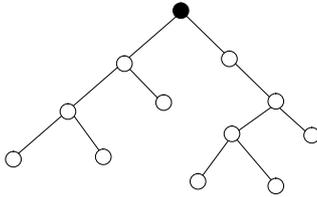
#### nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

# Binärbäume

Ein gewurzelter Baum heißt **Binärbaum**, wenn seine Knoten einen **Ausgangsgrad von höchstens 2** haben.

Ein **Binärbaum heißt vollständig**, wenn jeder Knoten außer den Blättern den **Ausgangsgrad 2** hat und die **Wege zu allen Blättern gleich lang** sind.



Höhe 2

Knoten: 7

Blätter: 4

Ein vollständiger **Binärbaum der Höhe h** hat  **$2^h$  Blätter** und  **$2^{h+1}-1$  Knoten**

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 417

### Ziele:

Knotenzahlen in Binärbäumen verstehen

### in der Vorlesung:

- Rekursive Struktur zeigen.
- Rekursive Berechnung der Knotenzahlen

### nachlesen:

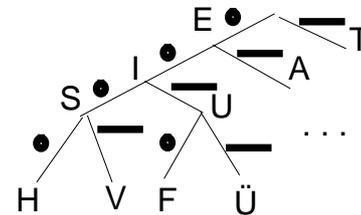
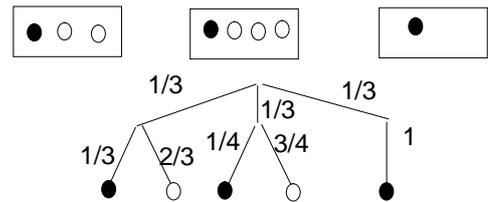
G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 6.3

# Modellierung von Entscheidungsbäumen

**Knoten** modelliert **Zwischenstand** einer mehrstufigen Entscheidungsfolge

**Kante** modelliert eine der wählbaren **Alternativen**

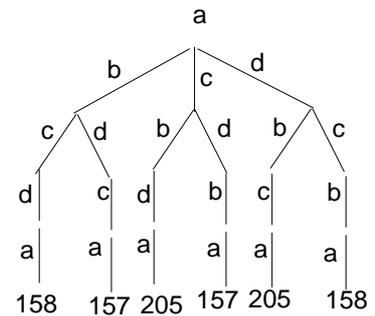
1. **Wahrscheinlichkeiten**,  
z. B. erst Schachtel, dann Kugel ziehen:
2. **Codierungen**,  
Z. B. Morse-Code



3. **Lösungsbaum** für kombinatorische Probleme,  
z. B. Traveling Salesman's Problem (Mod-4.12)  
Blätter repräsentieren einen Rundwege von a aus,  
Kanten sind mit Entscheidungen markiert

4. **Spielzüge**, z. B. Schach (ohne Bild)

Wird **derselbe Zwischenstand** durch verschiedene Entscheidungsfolgen erreicht,  
kann man **Knoten identifizieren**.  
Es entsteht ein azyklischer oder zyklischer Graph.



## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 418

**Ziele:**

Verschiedene Einsatzgebiete von Entscheidungsbäumen kennenlernen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen zu den Beispielen

**nachlesen:**

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

# Modellierung von Strukturen durch Bäume

**Knoten** modelliert ein **Objekt**.

**Kante** modelliert **Beziehung** „besteht aus“, „enthält“, „spezialisiert zu“, ...

**Beispiele:**

- **Typhierarchie:** Typ - Untertypen
- **Klassenhierarchie:** Oberklasse als Abstraktion ihrer Unterklassen (Mod-4.19a)  
**Vererbungshierarchie:** Unterklassen erben von ihrer Oberklasse
- **Objektbaum:** Objekt enthält (Referenzen auf) Teilobjekte
- **Kantorowitsch-Baum:** Operator mit seinen Operanden (Mod-4.19b)
- **Strukturbaum:** (Programm-)Struktur definiert durch eine kontextfreie Grammatik (Mod-4.19c)

**Identifikation gleicher Teilbäume** führt zu azyklischen Graphen (DAGs).

**Vorsicht:**

**Identifikation** muss mit der **Bedeutung der Kanten verträglich** sein;  
z. B. Ein Gegenstand kann nicht dasselbe Objekt mehrfach als Teil enthalten,  
wohl aber mehrere Objekte derselben Art.

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 419

**Ziele:**

Varianten von Baumstrukturen

**in der Vorlesung:**

- Prinzip der Modellierung von Baumstrukturen
- Varianten auf den folgenden 3 Folien

**nachlesen:**

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

**Verständnisfragen:**

Kennen Sie weitere Varianten von Baumstrukturen?

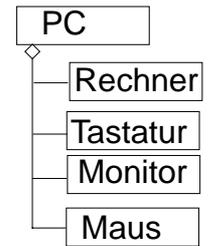
# Klassen- und Objekthierarchien

## Kompositionsbeziehung im Klassendiagramm (UML Notation):

Knoten: **Klassen**

Kanten: definieren, **aus welcher Art von Objekten** ein Objekt besteht  
z. B. ein Objekt der Klasse PC besteht aus  
einem Rechner-Objekt, einem Tastatur-Objekt, ...

Diese Beziehung zwischen den Klassen könnte  
**auch ein allgemeiner Graph** sein

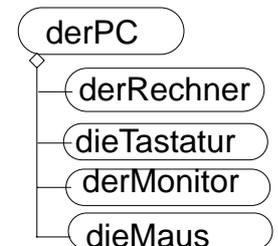


## Objektbaum im Objektdiagramm (fast UML):

Knoten: **Objekte**

Kanten: definieren, **aus welchen Objekten** ein Objekt besteht  
z. B. dieser PC besteht aus, diesem Rechner, ...

Diese Beziehung muss **konzeptionell ein Baum** sein.



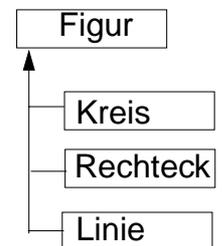
## Vererbungsbeziehung im Klassendiagramm (UML Notation):

Knoten: **Klassen**

Kanten: Unterklasse **erbt von** -> Oberklasse  
Oberklasse **ist Abstraktion** <- ihrer Unterklassen  
Kanten sind zur Wurzel hin gerichtet

**Baum bei Einfachvererbung** (Java)

**azyklischer Graph bei Mehrfachvererbung** (C++)



## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 419a

### Ziele:

Klassendiagramme kennenlernen

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu:

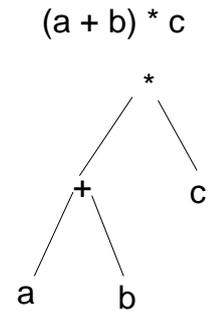
- UML Klassendiagramme: Wichtiges Beschreibungsmittel in der Software-Technik.
- Klassendiagramme sind aus ER-Modell abgeleitet (siehe Kapitel 5)
- Klassendiagramme: nicht nur Bäume
- Unterscheidung von Objektdiagrammen und Klassendiagrammen

# Kantorowitsch-Bäume

Darstellung der Struktur von Termen, Formeln, Ausdrücken  
(siehe Mod-2.19)

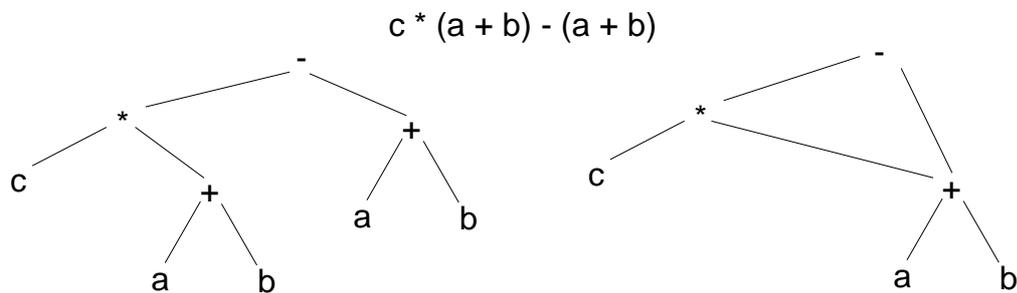
**Knoten:** Operator

**Kanten:** Verbindung zu den Operanden eines Operators  
Die Kanten sind geordnet (Kantenmarkierung):  
erster, zweiter, ... Operand



**Identifikation gleicher Teilbäume** führt zu azyklischen Graphen (DAGs):

Z. B. identifizieren Übersetzer gleiche Teilbäume, um Code zu erzeugen,  
der sie nur einmal auswertet:



## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 419b

### Ziele:

Erinnerung an Kantorowitsch-Bäume

### in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

- Ordnung der Kanten
- Identifikation von Teilbäumen

## Strukturbäume zu kontextfreien Grammatiken

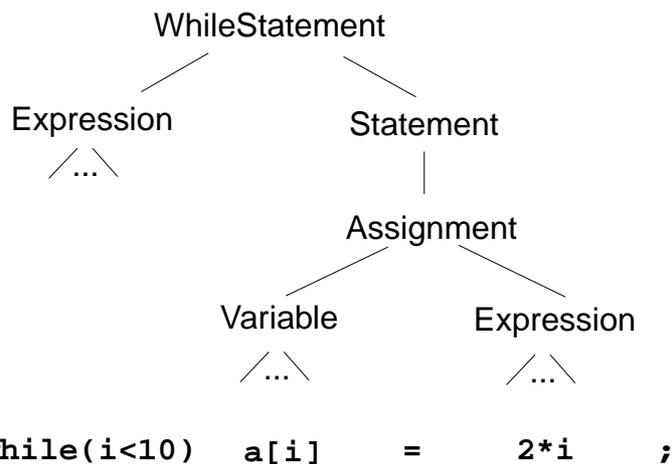
Kontextfreie Grammatiken definieren die Struktur von Programmen, Texten oder Daten. Ein Programm, Text oder strukturierte Daten werden als Strukturbaum dargestellt.

**Knoten: Programmkonstrukt** (Nichtterminal der Grammatik)

**Kante: Bezug zu Bestandteilen des Programmkonstruktes** (Produktion der Grammatik)

Für die Repräsentation von Texten sind die **Kanten geordnet** (Kantenmarkierung)

**Strukturbaum:**



**Produktionen aus der kontextfreien Grammatik:**

Statement ::= Assignment

Statement ::= WhileStatement

...

WhileStatement ::= Expression Statement

Assignment ::= Variable Expression

### Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 419c

**Ziele:**

Strukturbaum am Beispiel kennenlernen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu:

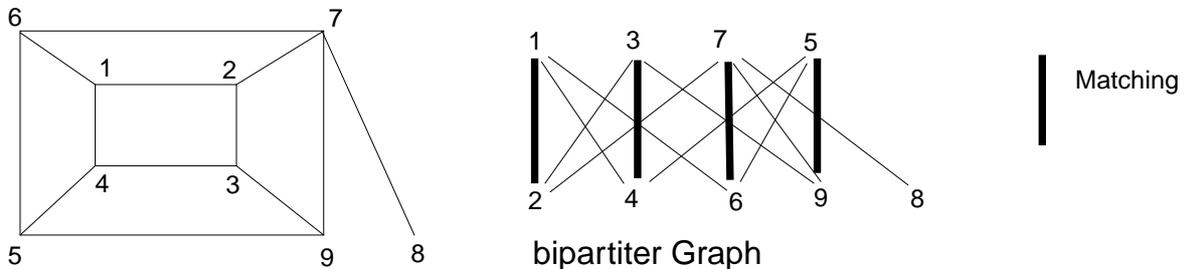
- Kontextfreie Grammatiken werden in Kapitel 5 eingeführt
- Bedeutung von Produktionen informell: "WhileStatement besteht aus Expression und Statement".
- Bezug zum Strukturbaum.

## 4.5 Zuordnungsprobleme

### Aufgabenklasse **paarweise Zuordnung (Matching):**

Im ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  modelliert eine Kante  $\{a, b\}$  „a passt zu b“, ggf. mit einer Kantenmarkierung als Abstufung

Gesucht ist eine **maximale Menge unabhängiger Kanten**, das ist ein Teilgraph  $M$  mit allen Knoten aus  $V$  und möglichst vielen Kanten aus  $E$ , so dass der **Grad der Knoten höchstens 1** ist.  $M$  heißt ein **Matching** der Knoten von  $G$ .



Graph  $G$  heißt **bipartit**, wenn  $V$  in **2 disjunkte Teilmengen**  $V = V_1 \cup V_2$  zerlegt werden kann, so dass jede Kante zwei Knoten aus verschiedenen Teilmengen verbindet.

Häufig liefert die Aufgabenstellung schon bipartite Graphen, sogenannte **Heiratsprobleme:**

Mann - Frau

Aufgabe - Bearbeiter

Verbraucher - Produkte

### Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 420

#### Ziele:

Paarweise Zuordnung verstehen

#### in der Vorlesung:

- Matching-Begriff erläutern,
- bipartit erläutern,
- Beispiele angeben

#### nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.2

## Konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung)

Aufgabenklasse **konfliktfreie Knotenmarkierung (Färbung):**

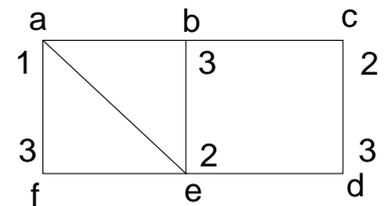
Im ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  modelliert eine Kante  $\{a, b\}$  „a ist unverträglich mit b“,

Gesucht ist eine Knotenmarkierung Färbung:  $V \rightarrow \mathbb{N}$  („Farben“),  
so dass durch eine Kante verbundene Knoten verschiedene Marken haben

Die chromatische Zahl eines Graphen  $G$  ist die minimale Zahl verschiedener „Farben“, die nötig ist, um  $G$  konfliktfrei zu markieren.

Es gilt: chromatische Zahl  $\leq 1 + \text{maximaler Knotengrad}$

Anwendungen:



**Knoten:**

Staat auf Landkarte

Partygast

Kurs

Prozess

Variable im Programm

**Kante:**

gemeinsame Grenze

unverträglich

haben gemeinsame Teilnehmer

benötigen gleiche Ressource

gleichzeitig lebendig

**Farbe / Marke:**

Farbe

Tisch

Termin

Ausführungszeitpunkt

Registerspeicher

### Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 421

**Ziele:**

Konzept der Färbung verstehen

**in der Vorlesung:**

- Erläuterung der Unverträglichkeitsrelation.
- Chromatische Zahlen einer Graphen.
- Erläuterung der Anwendungen.

## 4.6 Abhängigkeitsprobleme

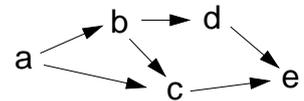
Graphen modellieren **Abhängigkeiten** zwischen Operationen und **Ausführungsreihenfolgen** von Operationen.

**Abhängigkeitsgraph: gerichtet, azyklisch, voneinander abhängige Operationen.**

Aufgaben dazu: sequentielle oder parallele **Anordnungen finden** (engl. **scheduling**).

**Knoten: Operation**, Ereignis; ggf. mit Dauer markiert

**Kante:**  $a \rightarrow b$      $a$  ist **Vorbedingung** für  $b$  oder  
 $b$  **benutzt** Ergebnis von  $a$  oder  
 $a$  liest oder schreibt Ressource  
 bevor  $b$  sie überschreibt



**Anwendungen:**

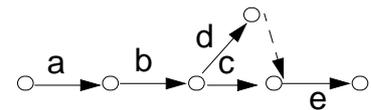
- **Projektplanung** mit abhängigen Teilaufgaben (PERT, CPM)
- abhängige **Transaktionen** mit einer Datenbank
- **Anordnung von Code** für die parallele Auswertung von Ausdrücken (Übersetzer)

**Kritischer Pfad:** längster Weg von einem Anfangsknoten zu einem Endknoten

**Duale Modellierung:**

**Knoten: Ereignis**, Anfang und Ende einer Operation

**Kante: Operation**, ggf. mit Dauer markiert



### Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 422

**Ziele:**

Prinzip der Abhängigkeitsgraphen verstehen

**in der Vorlesung:**

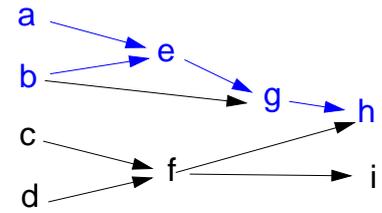
Erläuterungen zu

- Bedeutung von Knoten und Kanten
- Markierungen
- kritischem Pfad
- dualer Modellierung

# Anordnung von Abhängigkeitsgraphen

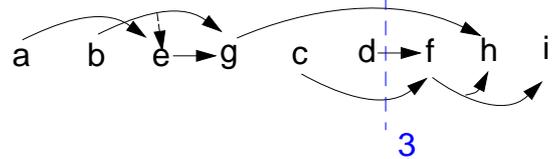
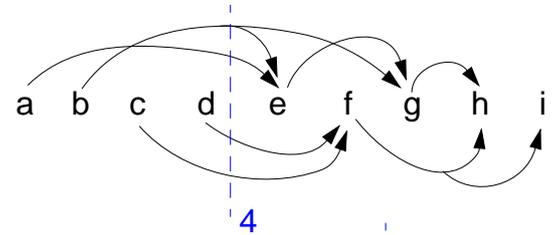
**Anordnungsaufgaben:**  
 gegebener Abhängigkeitsgraph

kritischer Pfad



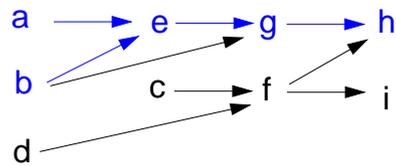
**sequentielle Anordnung der Knoten,**  
 so dass **alle Kanten vorwärts** zeigen.

Meist sollen **Randbedingungen** erfüllt werden,  
 z. B. geringste **Anzahl gleichzeitig benötigter  
 Zwischenergebnisse im Speicher**



**parallele Anordnung** mit  
 beschränkter Parallelität 3

Länge: 4 Schritte (Operationen)



© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 423

**Ziele:**

Anordnungsaufgaben verstehen

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen zu

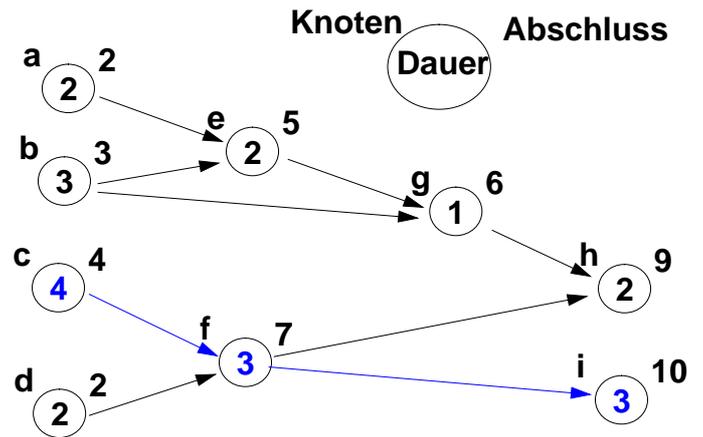
- Kanten nur vorwärts
- sequentielle Anordnung: Anzahl der Operationen bestimmt die Länge
- Anzahl der Zwischenergebnisse
- parallele Anordnung: kritischer Pfad bestimmt die Länge

# Operationen unterschiedlicher Dauer

Zwei **Knotenmarkierungen**:

**Dauer** der Operation und  
**frühester Abschlusstermin**  
 = max. Abschluss der Vorgänger  
 + Dauer des Knotens

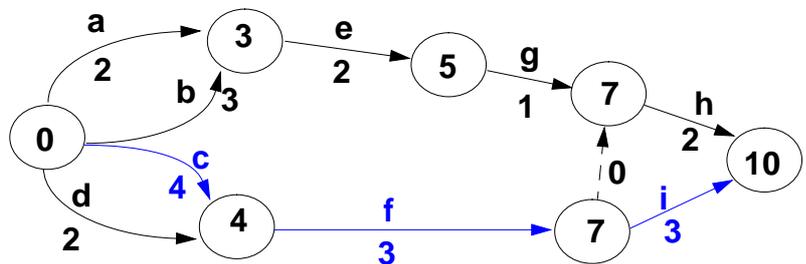
**Kritischer Pfad** gemäß maximaler  
 Summe der Dauer der Operationen



**Duale Modellierung:**

**Kante: Operation**  
 mit **Dauer** als Marke  
 Mehrfachkanten, Multigraph

**Knoten: Ereignis**  
 „vorangehende Operationen  
 sind abgeschlossen“  
 mit frühestem **Abschlusstermin**  
 als Marke



© 2002 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 424

**Ziele:**

Ausführungsdauer modellieren

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen zu

- den Knotenmarkierungen,
- der Berechnung des Abschlusstermins,
- dem Kritischen Pfad,
- der dualen Modellierung,
- der Notwendigkeit der zusätzlichen (gestrichelten) Kante

# Ablaufgraphen

**Gerichteter Graph (auch zyklisch) modelliert Abläufe.**

**Knoten:** Verzweigungsstelle, Zustand

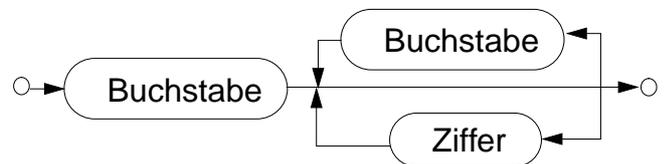
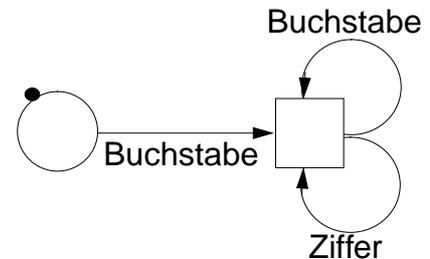
**Kanten:** Fortsetzungsmöglichkeit

Jeder **Weg** durch den Graphen beschreibt einen **potenziellen Ablauf**

Die **Folge der Markierungen eines Weges** kann einen **Satz einer Sprache** modellieren.

**Anwendungen:**

- **Endlicher Automat** (siehe Kapitel 6)  
modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...  
**Knoten:** Zustand  
**Kante:** Übergang markiert mit Zeichen
- **Syntaxdiagramm**  
modelliert **Folgen von Zeichen**, Symbolen, ...  
Knoten: markiert mit Zeichen  
Kante: „kann folgen auf“  
**dual zum endlichen Automaten**
- **Aufrufgraphen** (siehe Mod-4.26)
- **Ablaufgraphen** (siehe Mod-4.27)



## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 425

### Ziele:

Prinzip der Ablaufgraphen verstehen

### in der Vorlesung:

- Erläuterungen am Beispiel des endlichen Automaten.
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Kantenmarkierung.
- Syntaxdiagramme als dualen Beschreibung zum endlichen Automaten erklären,
- Die Zeichnung hat keine Knotennamen, nur eine Knotenmarkierung.
- Viele einzelne Kanten sind in der Zeichnung zu einem "Gleissystem" zusammengefasst.

# Aufrufgraphen

**Gerichteter Aufrufgraph:** Aufrufbeziehung zwischen Funktionen in einem Programm; wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

**Knoten:** Funktion im Programm

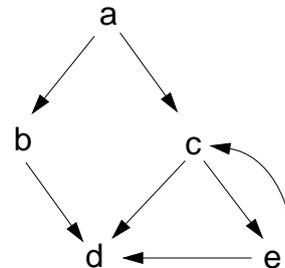
**Kante a -> b:** Rumpf der Funktion a enthält einen Aufruf der Funktion b; **a könnte b aufrufen**

**Zyklus im Aufrufgraph:**

Funktionen, die sich **wechselweise rekursiv** aufrufen, z. B. (c, e, c)

**Fragestellungen** z. B.

- Welche Funktionen sind nicht rekursiv?
- Welche Funktionen sind nicht (mehr) erreichbar?
- Indirekte Wirkung von Aufrufen, z. B. nur e verändere eine globale Variable x; welche Aufrufe lassen x garantiert unverändert? b, d



## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 426

### Ziele:

Prinzip des Aufrufgraphen verstehen

### in der Vorlesung:

- Erläuterungen dazu
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

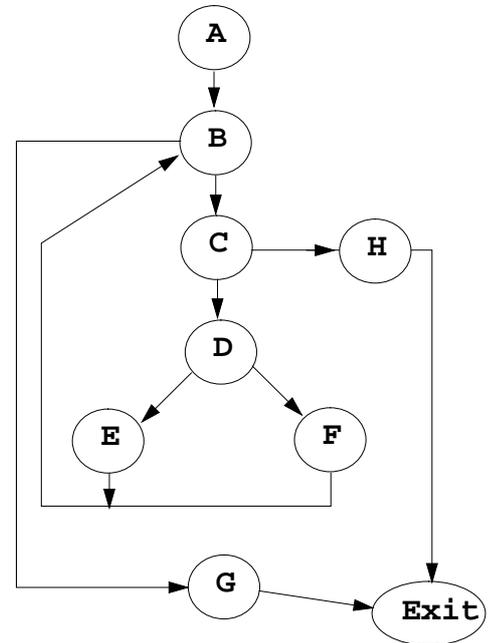
# Programmablaufgraphen

**Gerichteter Graph**, modelliert **Abläufe durch ein verzweigtes Programm** (bzw. Funktion); wird benutzt in **Übersetzern** und in **Analysewerkzeugen** zur Software-Entwicklung.

**Knoten:** unverzweigte Anweisungsfolge (Grundblock), mit Verzweigung (Sprung) am Ende

**Kante:** potenzieller Nachfolger im Ablauf

|  |   |
|--|---|
| <code>ug = 0;</code>                     | A |
| <code>og = obereGrenze;</code>           |   |
| <code>while (ug &lt;= og)</code>         | B |
| <code>{ mitte = (ug + og) / 2;</code>    | C |
| <code>  if (a[mitte] == x)</code>        |   |
| <code>    return mitte;</code>           | H |
| <code>  else if (a[mitte] &lt; x)</code> | D |
| <code>    ug = mitte + 1;</code>         | E |
| <code>  else og = mitte - 1;</code>      | F |
| <code>}</code>                           |   |
| <code>return nichtGefunden;</code>       | G |



**Fragestellungen**, z. B.

- Menge von Wegen, die den **Graph überdecken**, **Software-Testen**
- Wege mit bestimmten Eigenschaften, **Datenflussanalyse**

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 427

### Ziele:

Prinzip des Programmablaufgraphen verstehen

### in der Vorlesung:

- Erläuterungen zum Prinzip,
- Auch andere Abläufe als Programme können so modelliert werden.
- Weitere Eigenschaften und Anwendungen in der Vorlesung Übersetzer.

## Zusammenfassung zu Graphen

### Problemklassen:

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Entscheidungsbäume
- hierarchische Strukturen
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- Anordnungen in Folgen
- verzweigte Abläufe

### Kanten- und Knotenbedeutung:

- verbunden, benachbart, ...
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- allgem. symmetrische Relation
- besteht aus, enthält, ist-ein
- (Halb-)Ordnungsrelation

### Kanten-, Knotenmarkierungen:

- Entfernung, Kosten, Gewinn, ... bei Optimierungsproblemen
- „Färbung“, disjunkte Knotenmengen bei Zuordnungsproblemen
- Symbole einer Sprache

## Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 428

### Ziele:

Übersicht zu Modellierungsaspekten

### in der Vorlesung:

- Stichworte zum Einordnen von Modellierungsaufgaben,
- Hilfe zur Wahl einer passenden Variante von Graphen