

9. Wiederholung

Wunschkonzert – Modellierung WS 2001/2002

Nr.	Thema	# Stimmen	Platzierung
0	nichts	32	
1	Wertebereiche	110	2. Platz
2	Funktionen, Relationen	66	
3	Terme, Signaturen	64	
4	Substitution, Unifikation	50	
5	Algebren	45	
6	Aussagenlogische Formeln	14	
7	Aussagenlogische Schlüsse	27	
8	Verifikation	182	1. Platz
9	Prädikatenlogik: Interpretation	75	3. Platz
10	Prädikatenlogik: Umformungen	59	
11	Graphen: Wegeprobleme	8	
12	Graphen: Verbindungsprobleme	7	
13	Graphen: Bäume	10	
14	Graphen: Zuordnungsprobleme	7	
15	Graphen: Abhängigkeiten	8	
16	KFG: Bäume	5	
17	KFG: Ableitungen	16	
18	Entity-Relationship-Modell	16	
19	ER: Kardinalitäten	24	
20	Endliche Automaten	27	
21	Petri-Netze	21	

Fehler: 0

Anzahl der Stimmen: 873

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 901

Ziele:

Wiederholungswünsche zeigen.

9.1 Schlussregeln für Algorithmenelemente

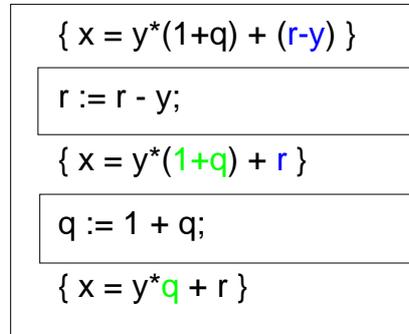
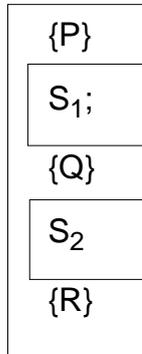
Sequenzregel:

{P}	S ₁	{Q}
{Q}	S ₂ ;	{R}
{P}		S ₁ ; S ₂
		{R}

Zuweisungsregel:

$$\{ P \quad x \quad \} x := e; \{ P \}$$

Wo in P x vorkommt, muss in $P \quad x \quad e$ stehen.



Schlussregel für die Anweisung anwenden



Schlussregel für die Anweisung anwenden

Konsequenzregel:

$$\{R\} \rightarrow \{Q\}$$

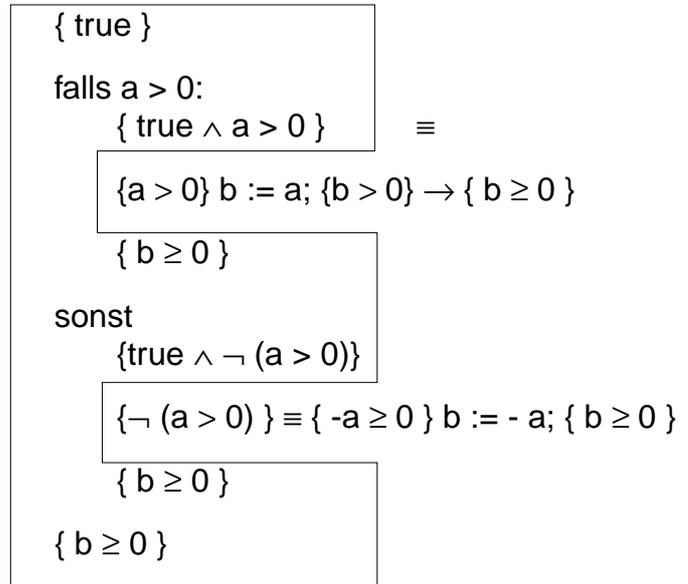
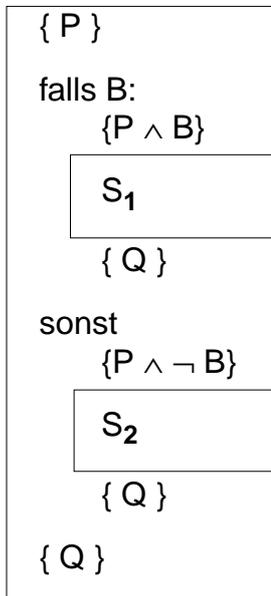
in Ausführungsrichtung einfügen, wo nötig.

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

2-seitige Alternative

$$\frac{\begin{array}{l} \{P \wedge B\} \quad S_1 \{Q\} \\ \{P \wedge \neg B\} \quad S_2 \{Q\} \end{array}}{\{P\} \text{ falls } B: S_1 \text{ sonst } S_2 \{Q\}}$$



Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 903

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Bedingte Anweisung

(Bedingter Schritt)

$$\frac{\{P \wedge B\} \quad S \{Q\}}{P \wedge \neg B \rightarrow Q}$$

$$\{P\} \text{ falls } B: S \{Q\}$$

$$\{P\}$$

falls B:

$$\{P \wedge B\}$$

$$S_1$$

$$\{Q\}$$

// leere Alternative:

$$\{P \wedge \neg B\} \rightarrow \{Q\}$$

$$\{Q\}$$

$$\{ \text{true} \}$$

falls $a < 0$:

$$\{ \text{true} \wedge a < 0 \}$$

$$\{a < 0\} \rightarrow \{-a > 0\}$$

$$a := -a;$$

$$\{a > 0\} \rightarrow \{a \geq 0\}$$

$$\{a \geq 0\}$$

// leere Alternative:

$$\{ \text{true} \wedge \neg (a < 0) \} \rightarrow \{a \geq 0\}$$

$$\{a \geq 0\}$$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 904

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Schleifenregel

Schleifeninvariante P

im Beispiel ist P:

$$z * a^b = x^y \wedge b \geq 0$$

$$\{P \wedge B\} S \{P\}$$

$$\{P\} \text{ solange B wiederhole } S \{P \wedge \neg B\}$$

{P}
solange B wiederhole
 {P ∧ B}

S

{P}

{P ∧ ¬ B}

a := x; b := y; z := 1;

{a = x ∧ b = y ∧ z = 1} →

{z * a^b = x^y ∧ b ≥ 0}

solange b > 0 wiederhole

{z * a^b = x^y ∧ b ≥ 0 ∧ b > 0}

≡ {z * a * a^{b-1} = x^y ∧ (b-1) ≥ 0}

b := b - 1;

{z * a * a^b = x^y ∧ b ≥ 0}

z := z · a;

{z * a^b = x^y ∧ b ≥ 0}

{z * a^b = x^y ∧ b ≥ 0 ∧ b ≤ 0}

≡ {z * a^b = x^y ∧ b = 0} → {z = x^y}

Terminierung separat zeigen.

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 905

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

9.2 Wertebereiche

Wertebereich: **Menge gleichartiger Werte** aus dem modellierten Gegenstandsbereich

1. Mengen:

Definition von Mengen durch

Aufzählen der Elemente (extensional): $M := \{1, 4, 9, 16, 25\}$

Angabe einer Bedingung (intensional): $M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl}, a \leq 30\}$

Indexmenge: Menge verwendet zur **eindeutigen Identifikation von Objekten**,

z. B. KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

vergleiche Schlüsselattribut im ER-Modell

2. Potenzmengen:

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U , geschrieben $\text{Pow}(U)$ oder $\wp(U)$. $\text{Pow}(U) := \{M \mid M \subseteq U\}$

Beispiel: Grundmenge $U := \{a, b\}$ Potenzmenge $\text{Pow}(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Kardinalität: $|\text{Pow}(U)| = 2^n$ wenn $|U| = n$

Wertebereich n-stelliger **Relationen:** $\text{Pow}(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n)$

Wertebereich von **Funktionen:** $D \rightarrow B \subseteq \text{Pow}(D \times B)$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 906

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Wertebereiche (2)

3. Kartesisches Produkt:

geordnete **n-Tupel**: $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I \}$
 mit **Indexmenge** $I := \{1, \dots, n\}$ und $n > 1$

Kardinalität: $|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1, \dots, n\}$ mit $n > 1$

Beispiel: Daten := Tage \times Monate \times Jahre

bei **gleichen Mengen** M_i : $M \times M \times \dots \times M = M^n$ mit $n > 1$

Beispiel: Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfeln: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

4. Endliche Folgen

von Elementen aus A : n -Tupel über A von beliebiger Länge $n > 0$

$A^+ := \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i \geq 1 \}$ d. h. $(a_1, \dots, a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$

$A^* := A^+ \cup \{ () \}$

Beispiel: $(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 907

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Wertebereiche (3)

4. Relationen

n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$

$R \in \text{Pow}(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n)$

Kardinalität ist $|\text{Pow}(M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n)| = 2^{\prod_{i=1}^n |M_i|}$, falls alle M_i endlich sind.

Beispiel: $\text{Oder} := \{(w, w), (w, f), (f, w)\} \subseteq \text{Bool}^2$

5. Funktionen

Funktion f ist eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times B$ mit folgender Eigenschaft:
Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$, d. h. zu einem Urbild x gibt es nur ein Bild y .

Wertebereich $D \rightarrow B$ ist die Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden.
Es gilt $D \rightarrow B \subseteq \text{Pow}(D \times B)$.

Beispiel: $\text{Quadrat} := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{N} \text{ und } b = a * a\} \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen $|D \rightarrow B| = (|B| + 1)^{|D|}$
Anzahl der totalen Funktionen in $|D \rightarrow B|$ ist $|B|^{|D|}$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 908

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Wertebereiche (4)

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion $\text{id}_M : M \rightarrow M$ mit $\text{id}_M := \{ (x, x) \mid x \in M \}$

Charakteristische Funktion χ_M einer Menge $M \subseteq U$, mit der Trägermenge U gibt an, welche Elemente der Trägermenge U in M enthalten sind.

Prädikate: Funktionen mit Bildbereich Bool, z. B. $\leq : (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \rightarrow \text{Bool}$

Funktionen zur Modellierung von **mehrfachen Vorkommen (Multimengen, bags)**:
 $b : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt

z. B. geldBeutel: brdMünzen $\rightarrow \mathbb{N}_0$
 mit geldBeutel := $\{(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (50, 1), (100, 3), (200, 2), (500, 1)\}$

6. disjunkte Vereinigung

Wertebereiche A_1, A_2, \dots, A_n zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammengefasst .
 Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$$V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \} \quad \text{wobei } I := \{1, 2, \dots, n\}$$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (tag field).
 Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 909

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

9.3 Interpretation prädikatenlogischer Formeln

Prädikatenlogische Formel besteht aus:	Beispiel:	Interpretation \mathfrak{I} legt fest:
atomaren Formeln	$\forall x P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Individuenbereich $U := \{ \dots \}$
mit Prädikatssymbolen	$P \quad Q$	Prädikate $\mathfrak{I}(P) := \{ (a, b) \mid \dots \}$
Termen als Parametern	$x \quad f(x) \quad g(a, z)$	
Funktionssymbolen	$f \quad g \quad a$	Funktionen $\mathfrak{I}(f)(n) \rightarrow n+1$
freien Variablen	z	Variablenwerte $\mathfrak{I}(z) := 3$
gebundenen Variablen	x	
Formeln mit logischen Junktoren	$P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Verknüpfung gemäß AL
Quantor-Formeln	$\forall x P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Bindung jedes Wertes aus U an Variable; Auswertung gemäß Bedeutung von \forall und \exists

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 910

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive

Auswertung von Quantor-Formeln

$\forall x F(x)$ jeden Wert aus U einsetzen und Ergebnisse mit \wedge verknüpfen: $F(u_1) \wedge F(u_2) \wedge \dots$

$\exists x F(x)$ jeden Wert aus U einsetzen und Ergebnisse mit \vee verknüpfen: $F(u_1) \vee F(u_2) \vee \dots$

Wenn man einen Wert findet, der das Ergebnis bestimmt,

$F(u_i) = f$ bei \forall bzw. $F(u_i) = w$ bei \exists , braucht man nicht alle aufzuzählen.

Beispiel:

$$U := \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\mathfrak{S}(P) := \{ (a, b) \mid a + b < 5 \}$$

$\exists x \quad \forall y \quad P(x, y)$

1	1	w	\wedge		
1	2	w	\wedge		
1	3	w	$=$	w	\vee
2	1	w	\wedge		
2	2	w	\wedge		
2	3	f	$=$	f	\vee
3	1	w	\wedge		
3	2	f	\wedge		
3	3	f	$=$	f	$=$ w

hier steht das
Ergebnis fest

Vorlesung Modellierung WS 2001/2002 / Folie 911

Ziele:

Wiederholung mit veränderter Perspektive