2. Grundlegende Strukturen
2.1 Wertebereiche beschrieben durch Mengen

In der Modellierung von Systemen, Aufgaben, Lösungen kommen
Objekte unterschiedlicher Art und Zusammensetzung vor.

Für Teile des Modells wird angegeben, **aus welchem Wertebereich sie stammen**,
aber noch offen gelassen, welchen Wert sie haben.
Beispiel: Gegeben 3 Karten aus einem Kartenspiel; welches ist die höchste?

Die Beschreibung des Modells wird präzisiert durch **Angabe der Wertebereiche**,
aus denen die Objekte, Konstanten, Werte von Variablen, Eingaben, Ausgaben,
Lösungen, usw. stammen.

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**
Wertebereiche werden aus Mengen und Strukturen darüber gebildet.

Beispiel: Modellierung von Kartenspielen

Wertebereich	**einige Elemente daraus**
KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}	8 Dame
KartenArten := {Kreuz, Pik, Herz, Karo}	Pik
Karten := KartenArten $\times$ KartenSymbole Menge aller Paare aus KartenArten und KartenSymbole	(Kreuz, 8) (Herz, Dame)

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Übersicht über Begriffe

Wertebereich: eine **Menge gleichartiger Werte**

Grundlegender Kalkül: **Mengenlehre** (halbformal);
Mengen und Mengenoperationen

Strukturen über Mengen zur Bildung **zusammengesetzter Wertebereiche**

- Potenzmengen
- Kartesisches Produkt, Tupel
- Folgen
- Relation
- Funktion
- disjunkte Vereinigung

Verwendung des Kalküls:

Modellierung von Strukturen und Zusammenhängen

Grundlage für alle anderen formalen Kalküle

abstrakte Grundlage für Typen in Programmiersprachen

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Einführendes Beispiel 2.1

Internationale Arbeitsgruppen

Bei der UNO sollen Arbeitsgruppen aus Delegierten der drei Nationen A, B und C gebildet werden. Jede Nation hat vier Delegierte. Jede Gruppe besteht aus drei Personen, eine aus jeder Nation. Die Sprachen der drei Nationen sind verschieden; wir nennen sie auch A, B, C. Die Mitglieder jeder Arbeitsgruppe sollen eine gemeinsame Sprache sprechen.

aus [T. Scheurer S. 155]

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Beispiel 2.1 Modellierung mit Wertebereichen

Beschreibung	**formale Angaben**
Menge der Nationen	Nationen := {A, B, C}
Indexmenge zur Unterscheidung der Delegierten	Ind := {1, 2, 3, 4}
ein Delegierter modelliert durch ein **Paar**	(a, i) mit a $\in$ Nationen, i $\in$ Ind
Wertebereich der Delegierten	Delegierte := Nationen $\times$ Ind
Wertebereich der Arbeitsgruppen **3-Tupel, kartesischesProdukt**	AGn := $\{(A, i) \mid i \in Ind\} \times \{(B, j) \mid j \in Ind\} \times \{(C, k) \mid k \in Ind\}$
Wertebereich für **Teilmengen** von Sprachen	SprachMengen := Pow (Nationen) Pow (M) ist die **Potenzmenge** von M
Eine **Funktion** Sp gibt an, welche Sprachen ein Delegierter spricht:	Sp $\in$ DSpricht
Wertebereich solcher Funktionen	DSpricht := Delegierte -> SprachMengen
Wertebereich der gemeinsamen Sprachen einer AG	
Wertebereich	AGSpricht := AGn -> SprachMengen
GemSp ist eine Funktion daraus	GemSp $\in$ AGSpricht

N := M bedeutet „**Der Name N ist definiert als M**“.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Mengen

Menge: Zusammenfassung M von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge.
a ist Element aus M wird notiert $a \in M$.

Definition von Mengen durch

- **Aufzählen der Elemente (extensional)**: $M := \{1, 4, 9, 16, 25\}$
- **Angabe einer Bedingung (intensional)**: $M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$

Mengen können aus **atomaren oder zusammengesetzten** Elementen gebildet werden, z. B. Menge von Paaren {(Pik, 10), (Herz, Dame)}

Eine Menge kann auch **verschiedenartige Elemente** enthalten, z. B. {1, (Pik, 10), M, 9} aber **nicht bei der Modellierung mit Wertebereichen**

Die Existenz von atomaren Objekten des jeweiligen Modellierungsbereiches wird vorausgesetzt, z. B. die natürlichen Zahlen, Arten und Werte von Spielkarten.

Wichtige grundsätzliche Eigenschaften von Mengen:

- **Alle Elemente einer Menge sind verschieden.**
- **Die Elemente einer Menge sind nicht geordnet.**
- **Dieselbe Menge kann auf verschiedene Weisen definiert werden.**

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Russels Paradoxon

Man muss prinzipiell entscheiden können, ob ein Wert a **Element einer Menge** M ist, „$a \in M$?“

Russels Paradoxon:

> Sei P die Menge aller Mengen, sie sich nicht selbst als Element enthalten,
> also $P := \{ x \mid x \notin x \}$.
>
> Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum **Widerspruch**.

Um solche Anomalien auszuschließen, geben wir in **intensionalen Mengendefinitionen** an, aus welchem größeren, **schon definierten Wertebereich** die Elemente stammen:

$$M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, \text{ a ist Quadratzahl und } a \leq 30\}$$

hier also „$a \in \mathbb{N}$“.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Mengenoperationen

die leere Menge	$\emptyset$	
Teilmenge von	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
echte Teilmenge von	$M \subset N$	$M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung	$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M$ oder $x \in N\}$
Durchschnitt	$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M$ und $x \in N\}$
Differenz	$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M$ und $x \notin N\}$
relatives Komplement	$U \setminus N$	mit $N \subseteq U$ Trägermenge

M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$

$|M|$ oder Card(M) ist die **Kardinalität** von M, d. H. die Anzahl der Elemente in M

© 2000 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Potenzmengen

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U,
geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U).
Pow (U) := {M | M $\subseteq$ U}

Beispiel: Grundmenge U := {a, b} Potenzmenge Pow (U) = {$\emptyset$, {a}, {b}, {a, b}}

Kardinalität: $|\text{Pow (U)}| = 2^{\mathbf{n}}$ wenn $|\text{U}| = \text{n}$

Wenn die **Werte Teilmengen von U** sind, ist ihr **Wertebereich die Potenzmenge von U**.

Beispiel 2.1: Wertebereich der Sprachen, die ein Delegierter spricht
SprachMengen := Pow (Nationen), {A, B} $\in$ SprachMengen

Modellierungstechnik: Menge von Lösungen statt einer Lösung
Manche Aufgaben haben nicht immer genau eine Lösung, sondern je nach Daten mehrere oder keine Lösung. Dann kann man nach der Menge aller Lösungen fragen.
Der Wertebereich der Antwort ist die **Potenzmenge** des Wertebereiches der Lösungen.

Vergleiche auch **Mengentyp** in Pascal:

```
type Sprachen = set of {A, B, C};
var spricht: Sprachen;
spricht := {A, B};
```

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Kartesisches Produkt

Kartesisches Produkt der Mengen M und N:

Menge **aller geordneten Paare** mit erster Komponente aus M und zweiter aus N

$$M \times N := \{z \mid z = (x, y) \text{ und } x \in M \text{ und } y \in N\}$$

oder kürzer $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$

Zusammengesetzte Wertebereiche, z. B. Delegierte := Nation × Ind

Verallgemeinert zu (geordneten) **n-Tupeln**:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I\}$$

mit **Indexmenge** $I := \{1, \ldots, n\}$ und $n > 1$

Beispiel:

Daten := Tage × Monate × Jahre

Notation bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = M^n$ mit $n > 1$

Beispiel:

Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

Kardinalität: $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n | = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1,..., n\}$ mit $n > 1$

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Folgen

Endliche Folgen von Elementen aus A: n-Tupel über A von beliebiger Länge n > 0

$\mathbf{A^+} := \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i \geq 1 \}$ d. h. $(a_1, ..., a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$

Notationen:

ε **oder ()**	**die leere Folge**
$A^0 := \{ \varepsilon \}$	Menge, die nur die leere Folge über A enthält
$A^1 := \{ (a) \mid a \in A \}$	Menge einelementiger Folgen über A
$\mathbf{A^* := A^+ \cup A^0}$	der Wertebereich von Folgen über A, der auch die leere Folge enthält.

Beispiele:

$(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$

$(m, o, d, e, l, l) \in$ Buchstaben$^+$

neueAufträge := Auftrag*

gezogeneKarten := Karten*

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Relationen

Relationen sind Teilmengen aus kartesischen Produkten.

n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

Eine solche Relation R stammt also aus dem **Wertebereich Pow ($\mathbf{M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n}$)**

Seine **Kardinalität** ist $|\mathbf{Pow\ (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n)}| = 2^{\prod_{i \in I} |\mathbf{Mi}|}$, falls alle $\mathbf{M_i}$ endlich sind.

Eine Relation R definiert eine **Aussage über Tupel**.
Wir sagen auch: „Eine Relation R gilt für die Tupel in R."

Beispiele: NationenKleiner := {(A, C), (C, B), (A, B)} $\subseteq$ Nationen^2

Oder := {(w, w), (w, f), (f, w)} $\subseteq$ Bool^2

GültigeDaten $\subseteq$ Daten = Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre
(20, Oktober, 2000) $\in$ GültigeDaten, (30, Februar, 2000) $\notin$ GültigeDaten

alternative Schreibweisen für Elemente aus Relationen:
R(a) für a $\in$ R, z. B. GültigeDaten(20, Oktober, 2000)

bei 2-stelligen Relationen auch mit Operatoren:
x R y für (x, y) $\in$ R, z. B. $x \leq y$, $a \neq b$, $p \rightarrow q$

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Eigenschaften 2-stelliger Relationen

Für zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ sind folgende Begriffe definiert:

- **reflexiv**, wenn für alle $x \in M$ gilt x R x;
- **irreflexiv**, wenn für kein $x \in M$ gilt x R x;
- **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus x R y folgt y R x;
- **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus x R y und y R x folgt $x = y$;
- **asymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus x R y folgt, y R x gilt nicht;
- **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt, aus x R y und y R z folgt x R z;
- **alternativ**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt x R y oder y R x;
- **Äquivalenzrelation**, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Hinweise zum Anwenden der Definitionen:

- „**x R y**“ bedeutet „**(x, y)** $\in$ **R**“
- **„**für alle $x \in M$ gilt ...“: der **gesamte Wertebereich M** muss geprüft werden
- „für alle $x, y \in M$ gilt ...“: alle Paare von Werten aus M prüfen, auch solche mit $x = y$
- „A **oder** B“ ist wahr, wenn **mindestens eins von beiden wahr** ist
- „**aus A folgt B**“ ist gleichwertig zu „**(nicht A) oder B**“.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Ordnungsrelationen

Eine zweistellige Relationen $R \subseteq M \times M$ ist eine

- **partielle Ordnung** oder **Halbordnung**, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- **strenge Ordnung** oder **strenge Halbordnung**, wenn R irreflexiv und transitiv ist;
- **Quasiordnung**, wenn R reflexiv und transitiv ist;
- **totale** oder **lineare Ordnung**, wenn R eine alternative Halbordnung ist,
  also alternativ, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Funktionen

Eine **Funktion f ist eine 2-stellige Relation f $\subseteq$ D $\times$ B** mit folgender Eigenschaft:
Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$, d. h. zu einem Urbild x gibt es nur ein Bild y.

D ist der **Definitionsbereich** von f; B ist der **Bildbereich** von f
D und B können beliebige, auch zusammengesetzte Wertebereiche sein.

Der **Wertebereich D -> B** ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B $\subseteq$ Pow (D $\times$ B).**
D -> B enthält als Elemente alle Mengen von Paaren über **D $\times$ B**, die Funktionen sind

Für eine Funktion $f \in$ D -> B gilt $f \subseteq D \times B$.
Statt **f $\in$ D -> B** sagt man auch **f hat die Signatur D -> B** oder kurz **f: D -> B**

Schreibweisen für $(x, y) \in f$ auch $y = f(x)$ oder $f(x) = y$ oder $x\ f\ y$

Die Menge der Paare $(x, y) \in f$ heißt **Graph von f**.

Beispiele:	**Funktion**	**Wertebereich**
	not := {(w, f), (f, w)}	Bool -> Bool
	id := {(w,w), (f, f)}	Bool -> Bool
	Quadrat := {(a, b) | a $\in$ $\mathbb{N}$ und b = a*a}	$\mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
	ggt := {((a,b),c) | a, b, c $\in$ $\mathbb{N}$ und c ist größter gemeinsamer Teiler von a und b}	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -> $\mathbb{N}$
	Sp := {((A, 1), {A,B}), ((B, 2), {B})}	Delegierte -> SprachMengen

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion **f : D -> B** heißt

- **total**, wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **partiell**, wenn f für einige $x \in D$ nicht definiert sein könnte,
- **surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **injektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt,
- **bijektiv**, wenn f zugleich surjektiv und injektiv ist.

n-stellige Funktion: f: D -> B; der Definitionsbereich D ist ein Wertebereich von n-Tupeln

0-stellige Funktion k: -> B; der Definitionsbereich ist der **leere Wertebereich**;
k ist eine **konstante Funktion**; b = k() ist ein fester Wert

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen $| D \rightarrow B | = (| B | + 1)^{|D|}$

Anzahl der totalen Funktionen in | D -> B | ist $| B |^{|D|}$

Anzahl der Möglichkeiten für unterschiedliche Funktionen mit dieser Signatur

z. B. $|\{A, B, C\} \rightarrow \{w, f\}| = 3^3 = 27$ insgesamt; $2^3 = 8$ totale Funktionen in $|\{A, B, C\} \rightarrow \{w, f\}|$

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion

$\mathbf{id_M}$: M -> M mit $\mathrm{id}_{\mathbf{M}} := \{ (x, x) \mid x \in M \}$

Charakteristische Funktion $\chi_{\mathbf{M}}$ einer Menge $M \subseteq U$, mit der Trägermenge U
gibt an, welche Elemente der Trägermenge U in M enthalten sind.

$\chi_{\mathbf{M}}$: U -> Bool mit $\chi_{\mathbf{M}} := \{ (x, b) \mid x \in U \text{ und } b = (x \in M)\}$
$\chi_{\mathbf{M}}$ ist eine totale Funktion

Funktionen mit Bildbereich Bool heißen **Prädikate**.
z. B. <= : $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ -> Bool

Funktionen zur Modellierung von **mehrfachen Vorkommen**:
b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt

z. B. geldBeutel: brdMünzen -> $\mathbb{N}_0$
mit geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (50, 1), (100, 3), (200, 2), (500, 1)}

So kann man sog. **Multimengen (bags)**, in denen Elemente mehrfach vorkommen können, beschreiben.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Funktionen auf Indexmengen

Indexmengen dienen zur Unterscheidung von Objekten des Modellbereiches

z. B. Ind = {1, ..., n}, KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}

Funktionen auf Indexmengen modellieren ...

das Auftreten von Werten in Folgen:

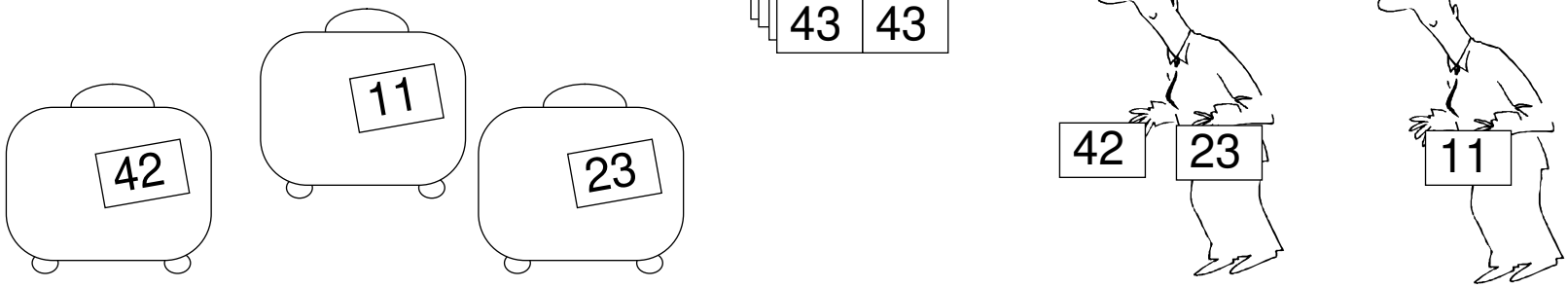
Beispiel:

eine Folge	F := (w, e, l, l, e)
Indexmenge dazu	FPositionen := {1, 2, 3, 4, 5}
Werte in der Folge	FWerte := {w, e, l}
Auftreten von Werten in der Folge	FAuftreten := {(1, w), (2, e), (3, l), (4, l), (5, e)}
Wertebereich	FAuftreten ∈ FPositionen -> FWerte

Zuordnungen zwischen Mengen:

z. B. Gepäckstücke ihren Eigentümern zuordnen durch ein Funktionenpaar

Marke1 ∈ Ind -> Gepäckstücke (injektiv) Marke2 ∈ Ind -> Eigentümer



© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Disjunkte Vereinigung

Die allgemeine **disjunkte Vereinigung** fasst n Wertebereiche (Mengen) A_1, A_2, ..., A_n zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammen, wobei I := {1, ..., n}.
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$$

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

Anwendungsmuster:

V ist ein allgemeinerer Wertebereich, abstrahiert von den spezielleren A_i

Beispiele:

Kunden := {Siemens, Benteler, Unity} Lieferanten := {Orga, Siemens}
Ind := {Kunde, Lieferant}
GeschäftsPartner := { (Kunde, Siemens), (Kunde, Benteler), (Kunde, Unity),
(Lieferant, Orga), (Lieferant, Siemens)}

Buchstaben := {a, b, ..., z} Ziffern := {0, 1, ..., 9} Ind := {Buchstabe, Ziffer}

Zeichen = { (Buchstabe, b) | b ∈ Buchstaben} ∪ { (Ziffer, z) | z ∈ Ziffern}

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Hinweise zum Modellieren mit Wertebereichen

- Erst Grundmengen festlegen, dann Strukturen darüber bilden.
- Typische Elemente eines Wertebereiches angeben - der Wertebereich ist eine Menge davon.
- Wertebereichen ausdruckskräftige Namen geben.
- Zusammengesetzte Wertebereiche schrittweise aufbauen (oder zerlegen).
- Entwürfe prüfen: Wertebereiche in Worten erklären.
- Nur gleichartige Elemente in einem Wertebereich.
- Mengen, Tupel und Folgen beliebiger Länge nicht verwechseln.
- Alle Klammern haben Bedeutung - zusätzliche verändern das Modell.

© 2001 bei Prof. Dr. Uwe Kastens