Wertebereiche zur Modellierung des Getränkeautomaten

Folgende Aspekte des Getränkeautomaten
können durch Wertebereiche Modelliert werden:

- Getränkevarianten
- Vorrat an Getränken und Zutaten
- Vorrat an Wechselgeld
- Eingeworfene Münzen
- Betätigte Wahltasten
- Anzeige des Automaten
- Zustand des Automaten
- weitere Aspekte ...

2.2 Terme
Übersicht

In allen formalen Kalkülen benutzt man **Formeln als Ausdrucksmittel**.
Hier betrachten wir **nur ihre Struktur - nicht ihre Bedeutung**. Wir nennen sie **Terme**.

Terme bestehen aus **Operationen**, **Operanden**, **Konstanten und Variablen**:

a + 5   blau ? gelb = grün   ♥ > ♦

Terme werden nicht „ausgerechnet“.
Operationen, Konstanten und Variablen werden als **Symbole ohne Bedeutung** betrachtet.

Notation von Termen:

Infix-, **Postfix**-, **Präfix**- und **Baum**-Form

Umformung von Termen:

Grundlage für die Anwendung von Rechenregeln, Gesetzen

Für **Variable** in Termen werden Terme **substituiert:**

in $a + a = 2*a$ substituiere a durch $3*b$ $3*b + 3*b = 2*3*b$

Unifikation: Terme durch Substitution von Variablen gleich machen,
z. B. um die Anwendbarkeit von Rechenregeln zu prüfen

Sorten und Signatur

Terme werden zu einer **Signatur** gebildet.
Sie legt die verwendbaren Symbole und die Strukturierung der Terme fest.

Signatur Σ := (S, F), S ist eine Menge von **Sorten**, F ist eine Menge von **Operationen**.

Sorte s $\in$ **S: Name** für einen Wertebereich; er braucht nicht weiter definiert zu sein.
z. B. STACK, ELEM, BOOL

Operation f $\in$ **F**: **Name** einer Funktion (Operatorsymbol), beschrieben durch
Anzahl der Operanden (**Stelligkeit**), **Sorten der Operanden** und des **Ergebnisses**

Beispiele:	**Name**	**Operandensorten**	**Ergebnissorte**	
	push:	STACK x ELEM	-> STACK	2-stellig
	createStack:		-> STACK	0-stellig
	$\wedge$:	BOOL x BOOL	-> BOOL	2-stellig
	$\neg$:	BOOL	-> BOOL	1-stellig
	T:		-> BOOL	0-stellig

0-stellige Operationen sind Konstante, z. B. T, F, createStack

Beispiel für eine Signatur: Σ_{BOOL} := (S_{BOOL}, F_{BOOL}) mit
S_{BOOL} := { BOOL },
F_{BOOL} := { T: -> BOOL, F: -> BOOL, $\wedge$: BOOL x BOOL -> BOOL, $\neg$: BOOL-> BOOL}

Korrekte Terme

In **korrekten Termen** muss jeweils die Zahl der Operanden mit der **Stelligkeit** der Operation und die **Sorten** der Operandenterme mit den Operandensorten der Operation übereinstimmen.

Die **Menge τ der korrekten Terme der Sorte s** wird induktiv definiert:
Zu einer Signatur $\Sigma = (S, F)$ ist ein **korrekter Term der Sorte $s \in S$**:

- der **Name einer Variablen** der Sorte s, oder
- die **Anwendung einer n-stelligen Operation**
  $f: s_1 \times s_2 \times \ldots \times s_n \text{ -> } s \in \Sigma$ auf Terme t_i: $f(t_1, t_2, .., t_n)$
  wobei jedes **t_i ein korrekter Term der Sorte s_i** ist
  mit $n \geq 0$ (einschließlich Konstante bei $n = 0$) und $i \in \{1, ..., n\}$

Nur die nach diesen Regeln gebildeten Terme gehören zur Menge τ der korrekten Terme.

$f(t_1,..., t_n)$ ist ein **n-stelliger Term**; die t_i sind seine **Unterterme**.

Korrekte Terme, die **keine Variablen** enthalten, heißen **Grundterme**.

Beispiele: korrekte Terme zur Signatur Σ_{BOOL}: F $\quad \neg T$ $\quad T \wedge x$ $\quad \neg(a \wedge b)$ $\quad x \wedge \neg y$

nicht korrekt: $a \neg b$ $\quad \neg (\wedge b)$

Notationen für Terme

Notation eines n-stelligen Terms mit Operation (Operator) f und Untertermen $t_1, t_2, ..., t_n$:

Bezeichnung	Notation	Beispiele
Funktionsform:	Operator **vor der geklammerten Folge** seiner Operanden $f\ (t_1, t_2, ..., t_n)$	 empty (push (createStack, c)) $\wedge$ (< (0, a), < (a, 10))
Präfixform:	Operator **vor** seinen Operanden $f\ \ t_1\ \ t_2\ ...\ t_n$	 $\wedge\ <\ 0\ \ a\ <\ a\ \ 10$
Postfixform:	Operator **nach** seinen Operanden $t_1\ \ t_2\ ...\ t_n\ \ f$	 $0\ a\ <\ a\ 10\ <\ \wedge$
Infixform	2-stelliger Operator **zwischen** seinen (beiden) Operanden $t_1\ f\ \ t_2$	 $0 < a\ \wedge\ a < 10$

Die **Reihenfolge der Operanden** ist in allen vier Notationen **gleich**.

Präzedenzen und Klammern

Die **Infixform** benötigt Klammern oder Präzedenzen, um Operanden an ihren Operator zu binden: Ist in x + 3 * y die 3 rechter Operand des + oder linker Operand des * ?

Klammern beeinflussen die Struktur von Termen in der Infixform:
z. B. (x + 3) * y oder x + (3 * y)
Redundante Klammern sind zulässig.
Ein Term ist **vollständig geklammert**, wenn er und alle seine Unterterme geklammert sind:
z. B. ((x) + ((3) * (y)))

Für die **Infixform** können den Operatoren unterschiedliche **Bindungsstärken (Präzedenzen)** zugeordnet werden, z. B. bindet * seine Operanden vereinbarungsgemäß stärker an sich als +, d. h. * hat **höhere Präzedenz** als +.
Damit sind x + 3 * y und x + (3 * y) verschiedene Schreibweisen für denselben Term.

Für **aufeinanderfolgende Operatoren gleicher Präzedenz** muss geregelt werden, ob sie ihre Operanden links-assoziativ oder rechts-assoziativ binden:

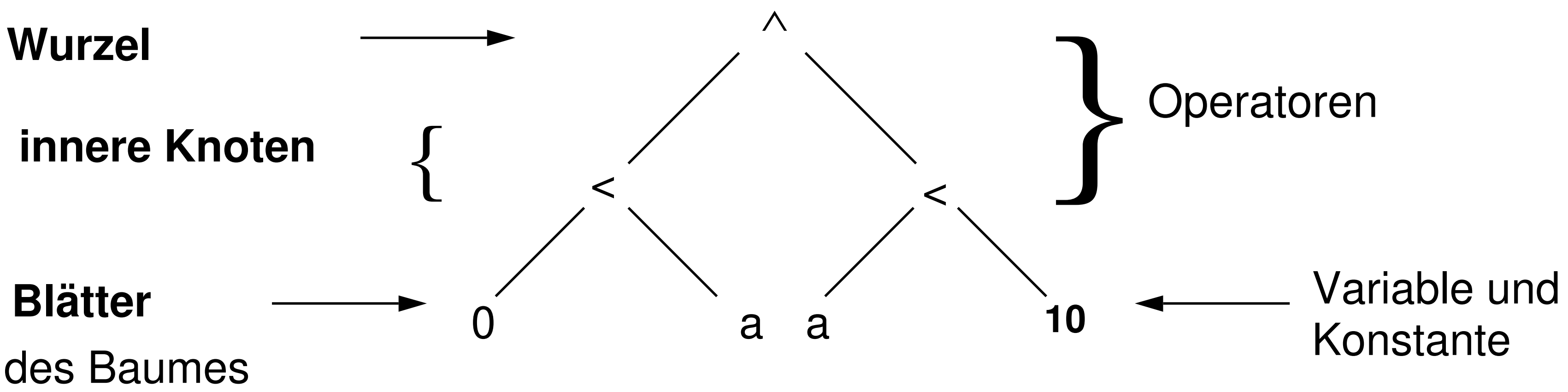
links-assoziativ:	x + 3 + y	steht für (x + 3) + y
rechts-assoziativ:	x ** 3 ** y	steht für x ** (3 ** y)

Funktionsform, Präfixform, Postfixform benötigen weder Präzedenzen noch zusätzliche Klammern!

Terme als Bäume

Terme kann man als Bäume darstellen (Kantorowitsch-Bäume):

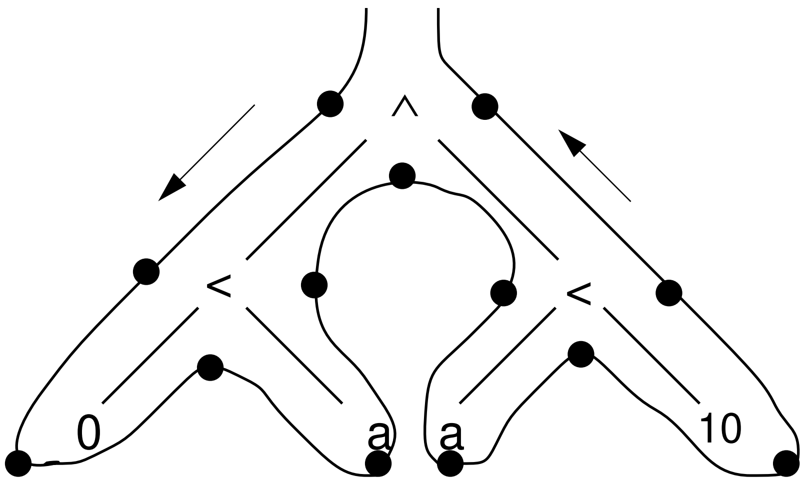
Term: $0 < a \wedge a < 10$



Aus einem Durchlauf des Baumes in Pfeilrichtung erzeugt man

- **Präfixform**, wenn man beim **ersten Besuch**
- **Postfixform**, wenn man beim **letzten Besuch**
- **Infixform**, wenn man beim **vorletzten Besuch** (bei 2-stelligen Operatoren)

den Operator aufschreibt.



Substitution

Eine **Substitution** beschreibt, wie in einem Term vorkommende **Variable durch Terme ersetzt** werden.

Eine **einfache Substitution** σ **= [v / t]** ist ein Paar aus einer Variablen v und einem Term t zur Signatur Σ. v und t müssen **dieselbe Sorte** s haben.
Beispiel: σ = [x / 2*b]

Die **Anwendung einer Substitution** σ **auf einen Term** u schreibt man **u** σ, z. B. (x+1) [x / 2*b].

Die **Anwendung einer Substitution u** σ mit σ **= [v / t]**, ist **definiert** durch

- u σ = t , falls u die zu ersetzende Variable v ist,
- u σ = u , falls u $\neq$ v und u eine Konstante oder eine andere Variable ist,
- u σ = f ($u_1\sigma$, $u_2\sigma$, ..., $u_n\sigma$) , falls u = f (u_1, u_2, ..., u_n)

D. h. in u werden **alle Vorkommen der Variablen v gleichzeitig durch den Term t ersetzt**.

Kommt v auch in t vor, so wird es nicht nochmals ersetzt!

Beispiele: (x + 1) [x / 2*b] = (2*b + 1)

(x - x) [x / 3] = (3 - 3)

(x + y) [y / y*y] = (x + y*y)

Mehrfache Substitution

Eine **mehrfache Substitution** $\sigma = [\, x_1 / t_1, ..., x_n / t_n]$ mit paarweise verschiedenen Variablen x_i steht für die
gleichzeitige Substitution aller Vorkommen aller Variablen x_i jeweils durch die Terme t_i.

Beispiele: $\sigma = [\, x / 2*b,\ y / 3\,]$

$(x + y)\ \sigma = (2*b + 3)$
$(y + a*y)\ \sigma = (3 + a*3)$
$(x * y)\ [\, x / y,\ y / y*y\,] = (y * (y * y))$

Auf einen Term können **mehrere Substitutionen hintereinander** ausgeführt werden,
z. B. $u\ \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 = ((u\ \sigma_1)\ \sigma_2)\ \sigma_3$ $(x+y)\ [x/y*x]\ [y/3]\ [x/a] = (y*x+y)\ [y/3]\ [x/a] = (3*a+3)$

Mehrere einfache **Substitutionen hintereinander** kann man **in eine mehrfache Substitution** mit gleicher Wirkung umrechnen:
Die Hintereinanderausführung $[\, x_1 / t_1, ..., x_n / t_n\,]\ [\, y / r\,]$

hat auf jeden Term die gleiche Wirkung wie

falls y unter den x_i vorkommt $[\, x_1 / (t_1[\, y / r\,]), ..., x_n / (t_n\, [\, y / r\,])]$
falls y nicht unter den x_i vorkommt $[\, x_1 / (t_1[\, y / r\,]), ..., x_n / (t_n\, [\, y / r\,]),\ y / r\,]$

Beispiel: $[\, x / y*x\,]\ [\, y / 3\,]\ [\, x / a\,] = [\, x / 3*x,\ y / 3]\ [\, x / a\,] = [\, x / 3*a,\ y / 3\,]$

Umfassende Terme

Rechenregeln werden mit **allgemeineren Termen** formuliert, die auf **speziellere Terme** angewandt werden,

z. B. Distributivgesetz:	$a * (b + c)$	=	$a * b + a * c$
angewandt auf	$2 * (3 + 4*x)$	=	$2 * 3 + 2 * 4*x$

Ein **Term s umfasst einen Term t**, wenn es eine Substitution σ gibt, die s in t umformt: $s\ \sigma = t$

s ist ein **allgemeineres** Muster; es umfasst den **spezielleren** Term t.

s umfasst t, ist eine **Quasiordnung**, d. h. die Relation **umfasst** ist

transitiv:	sei $r\ \sigma_1 = s$, $s\ \sigma_2 = t$, dann ist $r\ (\sigma_1\ \sigma_2) = t$
reflexiv:	$t\ [\ ] = t$, mit der leeren Substitution $[\ ]$
nicht antisymmetrisch:	Terme, die sich nur in den Variablennamen unterscheiden, kann man ineinander umformen, z. B. $2*x\ [\ x\ /\ y\ ] = 2*y$ und $2*y\ [\ y\ /\ x\ ] = 2*x$

Unifikation

Bei der Relation „umfasst“ wird ein Term mit einer Substitution in einen anderen transformiert.

Bei der **Unifikation** werden **zwei Terme so substituiert, dass sie gleich werden**.

Zwei Terme s und t sind unifizierbar, wenn es eine Substitution σ **gibt mit s** $\sigma =$ **t** σ.
σ heißt **Unifikator von s und t**.

Beispiel: Terme: s = (x + y) t = (2 + z)
Unifikatoren: σ_1 = [x / 2, y / z] σ_2 = [x / 2, z / y],
σ_3 = [x / 2, y / 1, z / 1] σ_4 = [x / 2, y / 2, z / 2] ...

Ist σ **ein Unifikator** von s und t und τ **eine Substitution**, dann ist auch die Hintereinanderausführung $\sigma\ \tau = \sigma'$ auch ein Unifikator von s und t.
Wir sagen σ **ist allgemeiner als** σ'**,** denn t σ umfasst t σ'.

Im Beispiel sind σ_1 und σ_2 allgemeiner als σ_3 und σ_4 .

Ein Unifikator σ heißt **allgemeinster Unifikator** der Terme s und t, wenn es zu allen anderen Unifikatoren σ' eine Substitution τ gibt mit $\sigma\ \tau = \sigma'$.

Im Beispiel sind σ_1 und σ_2 allgemeinste Unifikatoren, z. B. σ_1 [z / 1] $= \sigma_3$

Es kann **mehrere allgemeinste Unifikatoren** geben. Sie können durch **Umbenennen von Variablen** ineinander überführt werden, z. B. σ_1 [z / y] = [x / 2, y / y, z / y] $= \sigma_2$

Unifikationsverfahren

Unifikation zweier Terme s und t nach Robinson:

Seien s und t Terme in **Funktionsschreibweise**.
Dann ist das **Abweichungspaar A(s, t) = (u, v)** das erste Paar unterschiedlicher, korrespondierender Unterterme u und v, das man beim Lesen von links nach rechts antrifft.

Algorithmus:

1. Setze σ = [ ] (leere Substitution)
2. Solange es ein Abweichungspaar A(s σ, t σ) = (u, v) gibt wiederhole:
   a. ist **u eine Variable x**, die in v nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / v], oder
   b. ist **v eine Variable x**, die in u nicht vorkommt, dann ersetze σ durch σ [x / u],
   c. **sonst** sind die Terme s und t **nicht unifizierbar; Abbruch** des Algorithmus.
3. Bei Erfolg gilt s σ = t σ und σ **ist allgemeinster Unifikator**.

Beachte, dass bei jeder Iteration die bisherige Substitution auf die vollständigen Terme s, t angewandt wird.