6.2 Petri-Netze

Petri-Netz (auch Stellen-/Transitions-Netz):
Formaler Kalkül zur **Modellierung von Abläufen mit nebenläufigen Prozessen** und kausalen Beziehungen

Basiert auf **bipartiten gerichteten Graphen**:

- **Knoten** repräsentieren **Bedingungen**, Zustände bzw. **Aktivitäten**.
- **Kanten** verbinden **Aktivitäten** mit ihren **Vor- und Nachbedingungen**.
- **Knotenmarkierung** repräsentiert den veränderlichen **Zustand des Systems**.
- **graphische Notation**.

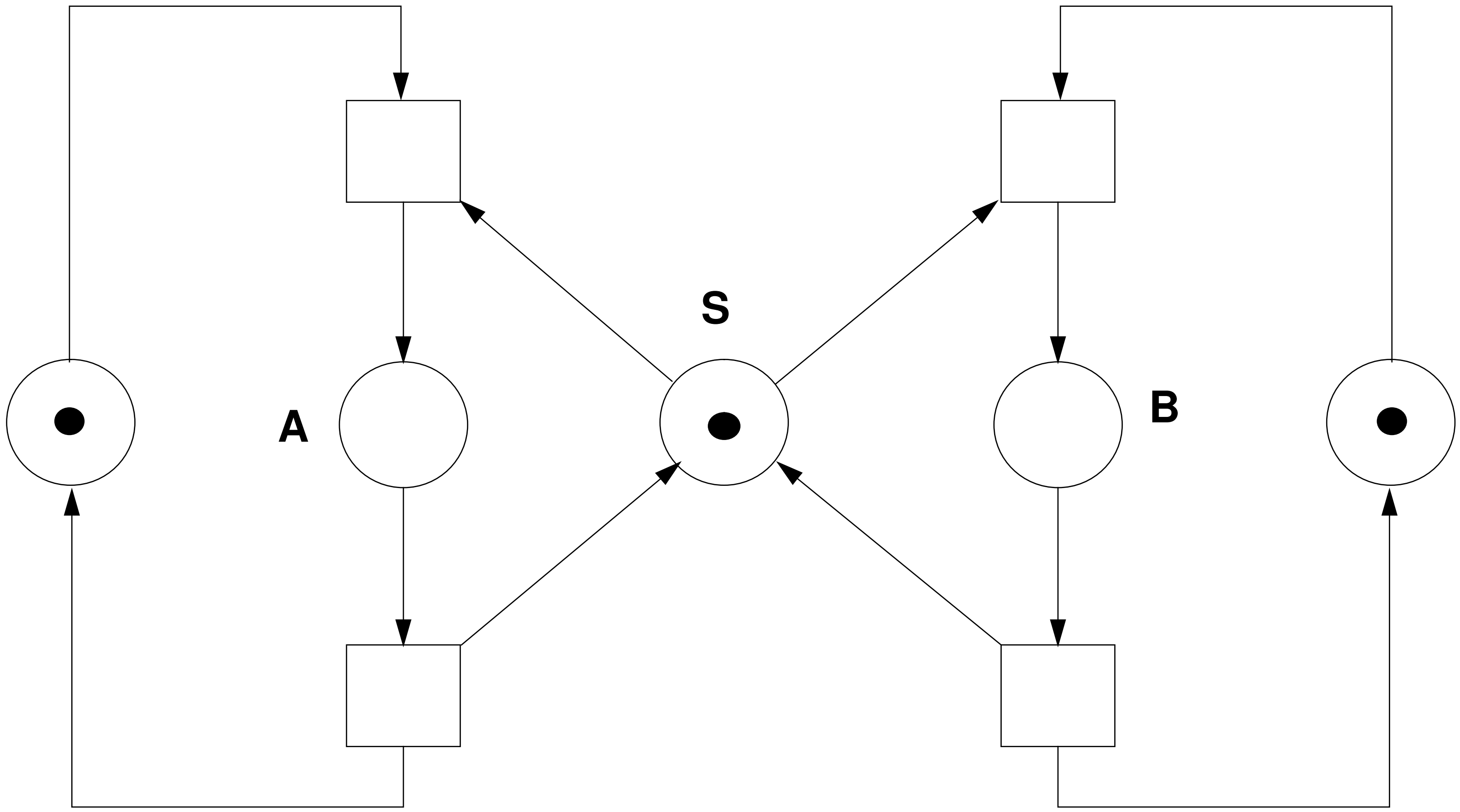
C. A. Petri hat sie 1962 eingeführt.
Es gibt zahlreiche Varianten und Verfeinerungen von Petri-Netzen. Hier nur die Grundform.

Anwendungen von Petri-Netzen zur Modellierung von

- realen oder abstrakten Automaten und Maschinen
- kommunizierenden Prozessen in der Realität oder in Rechnern
- Verhalten von Hardware-Komponenten
- Geschäftsabläufe
- Spielpläne

Einführendes Beispiel

Das Petri-Netz modelliert zwei **zyklisch ablaufende Prozesse**.
Die mittlere Stelle synchronisiert die beiden Prozesse,
so dass sie sich **nicht zugleich in den Zuständen A und B** befinden können.
Prinzip: **gegenseitiger Ausschluss** durch **Semaphor**



Definition von Petri-Netzen

Ein **Petri-Netz** ist ein Tripel P = (S, T, F) mit

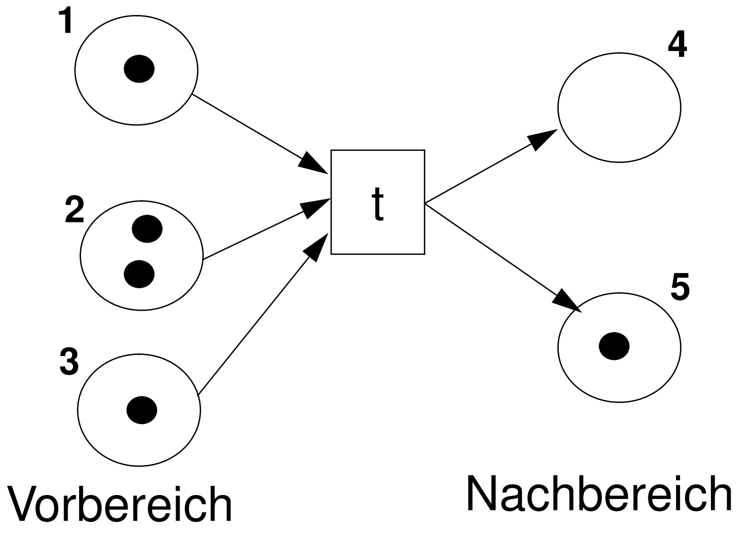
S **Menge von Stellen**,
repräsentieren Bedingungen, Zustände; graphisch Kreise

T **Menge von Transitionen** oder Übergänge,
repräsentieren Aktivitäten; graphisch Rechtecke

F **Relation** mit $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
repräsentieren kausale oder zeitliche Vor-, Nachbedingungen von Aktivitäten aus T

P bildet einen **bipartiten, gerichteten Graphen** mit den Knoten $S \cup T$ und den Kanten F.

Zu einer **Transition t** in einem Petri-Netz P sind folgende Stellenmengen definiert
Vorbereich (t) $:= \{ s \mid (s, t) \in F\}$
Nachbereich (t) $:= \{ s \mid (t, s) \in F\}$



Der **Zustand des Petri-Netzes** wird durch eine **Markierungsfunktion** angegeben, die jeder Stelle eine **Anzahl von Marken** zuordnet:
$M_P: S \rightarrow \mathbb{N}_0$
Sind die stellen von 1 bis n nummeriert, so kann man M_P als Folge angeben, z. B. (1, 2, 1, 0, 1)

Schaltregel für Petri-Netze

Das **Schalten einer Transition** t überführt eine Markierung M in eine Markierung M‘.

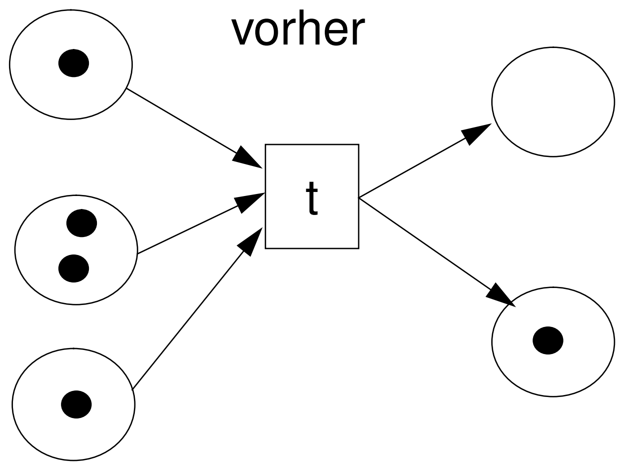
Eine **Transition t kann schalten**, wenn für alle Stellen s $\in$ Vorbereich (t) gilt M(s) $\geq$ 1.

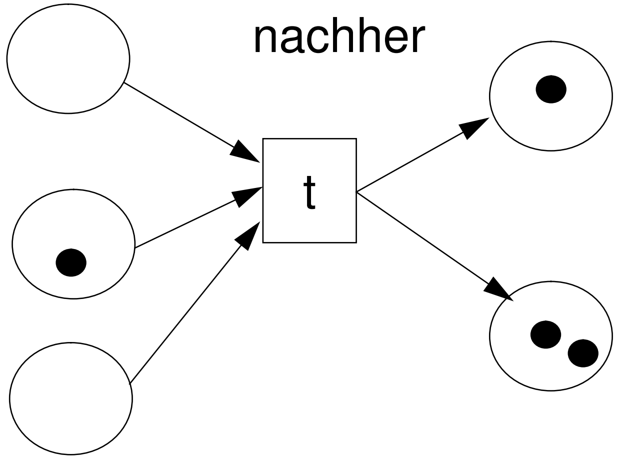
Wenn eine Transition t **schaltet,** gilt für die **Nachfolgemarkierung M‘**:

M‘(v) = M(v) - 1 für alle v $\in$ Vorbereich(t) \ Nachbereich(t)

M‘(n) = M(n) + 1 für alle n $\in$ Nachbereich(t) \ Vorbereich(t)

M‘(s) = M(s) sonst





Wenn in einem Schritt **mehrere Transitionen schalten können**, wird eine davon **nicht-deterministisch ausgewählt**.

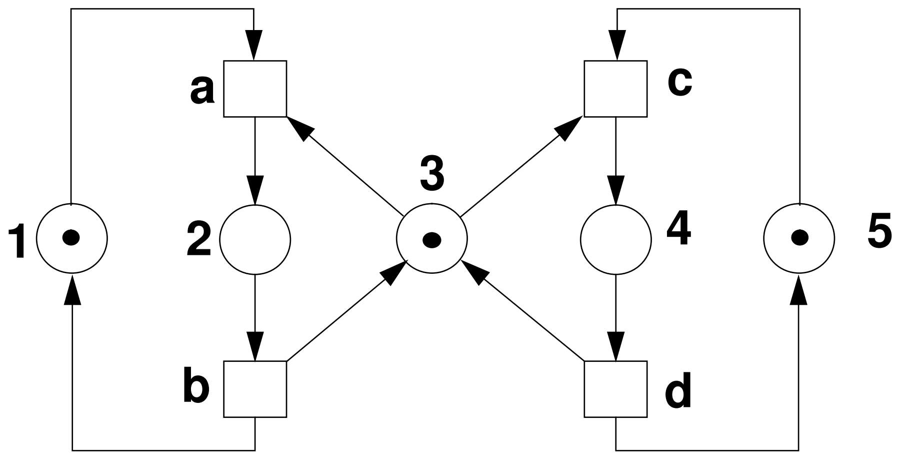
In jedem Schritt schaltet genau eine Transition
- auch wenn das Petri-Netz parallele Abläufe modelliert!

Zwei Transitionen mit gemeinsamen Stellen im Vorbereich können (bei passender Markierung) im **Konflikt** stehen:
Jede kann schalten, aber nicht beide nacheinander.

Markierungen

Zu jedem Petri-Netz wird eine **Anfangsmarkierung $\mathbf{M_0}$** angeben.

z. B. $\mathbf{M_0}$ = (1, 0, 1, 0, 1)

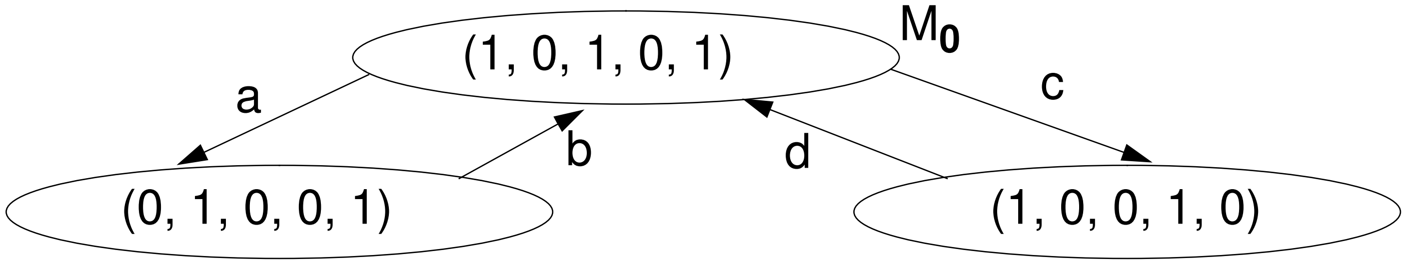


Wir sagen, eine **Markierung $\mathbf{M_2}$ ist von einer Markierung $\mathbf{M_1}$ aus erreichbar**, wenn es ausgehend von M_1 eine Folge von Transitionen gibt, die nacheinander schalten und M_1 in M_2 überführen können.

Die Markierungen eines Petri-Netzes kann man als gerichteten **Markierungsgraphen** darstellen:

- Knoten: erreichbare Markierung
- Kante a->b: Die Markierung a kann durch Schalten einer Transition in b übergehen.

Markierungsgraph



Schaltfolgen

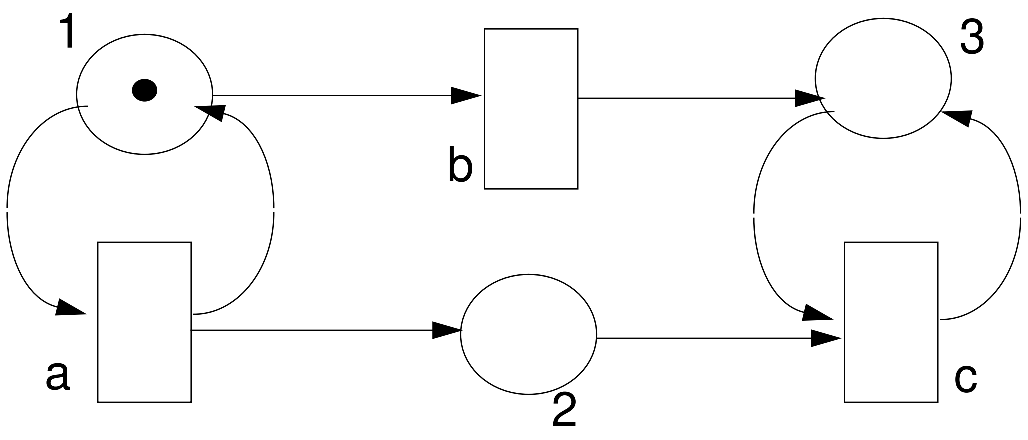
Schaltfolgen kann man angeben als

- Folge von Markierungen
- Folge der geschalteten Transitionen

Beispiel für eine **Schaltfolge** zum Petri-Netz auf Mod-6.15a:

(1, 0, 1, 0, 1)	a
(0, 1, 0, 0, 1)	b
(1, 0, 1, 0, 1)	c
(1, 0, 0, 1, 0)	d
(1, 0, 1, 0, 1)	

Schaltfolgen können als Wörter einer Sprache aufgefasst werden.



alle Schaltfolgen ohne Nachfolgemarkierung haben die Form:

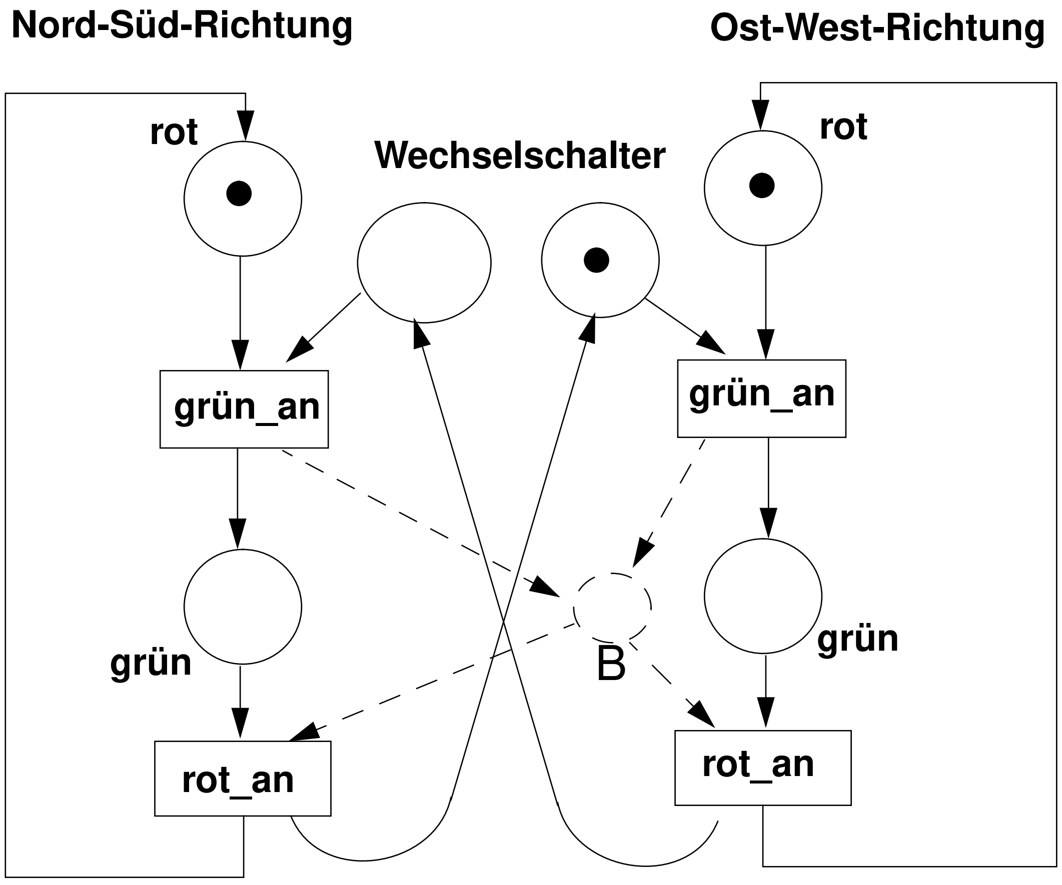
$a^{\mathbf{n}}\ b\ c^{\mathbf{n}}$

Petri-Netze können unbegrenzt zählen: Anzahl der Marken auf einer Stelle.

Modellierung alternierender zyklischer Prozesse

Beispiel: Einfache Modellierung einer Ampelkreuzung:

- 2 sich zyklisch wiederholende Prozesse
- Die beiden Stellen „Wechselschalter“ koppeln die Prozesse, sodass sie alternierend fortschreiten.
- Alle Stellen repräsentieren Bedingungen: 1 oder 0 Marken
- „Beobachtungsstelle“ B modelliert, wieviele Richtungen „grün“ haben

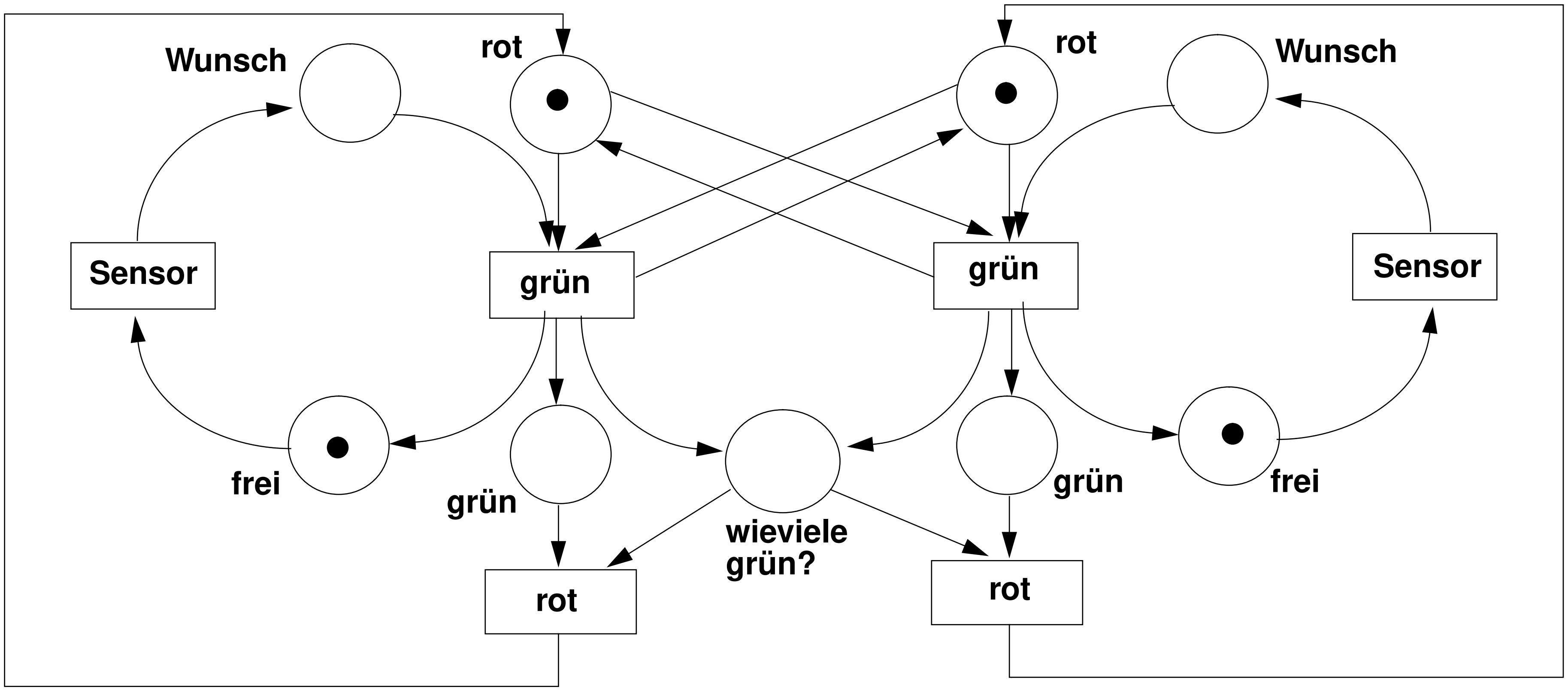


Beispiel für ein binäres Netz

Ein Petri-Netz heißt **binär (sicher)**, wenn für alle aus M_0 erreichbaren Markierungen M und für alle Stellen s gilt $M(s) \leq 1$.

Petri-Netze, deren **Stellen Bedingungen repräsentieren** müssen binär sein.

Beispiel: Modellierung einer Sensor-gesteuerten Ampelkreuzung:



aus: B. Baumgarten: Petri-Netze, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 1990

Lebendige Petri-Netze

Petri-Netze modellieren häufig **Systeme, die nicht anhalten** sollen.

Ein Petri-Netz heißt **schwach lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung eine Nachfolgemarkierung gibt.

Eine **Transition t heißt lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung M' eine Markierung M" gibt, die von M' erreichbar ist, und in der t schalten kann.

Ein **Petri-Netz heißt lebendig**, wenn alle seine Transitionen lebendig sind.

Verklemmung: Ein System kann unerwünscht anhalten,
weil das **Schalten einiger Transitionen zyklisch voneinander abhängt**.

Sei: $\sigma \subseteq S$ eine Teilmenge der Stellen eines Petri-Netzes und

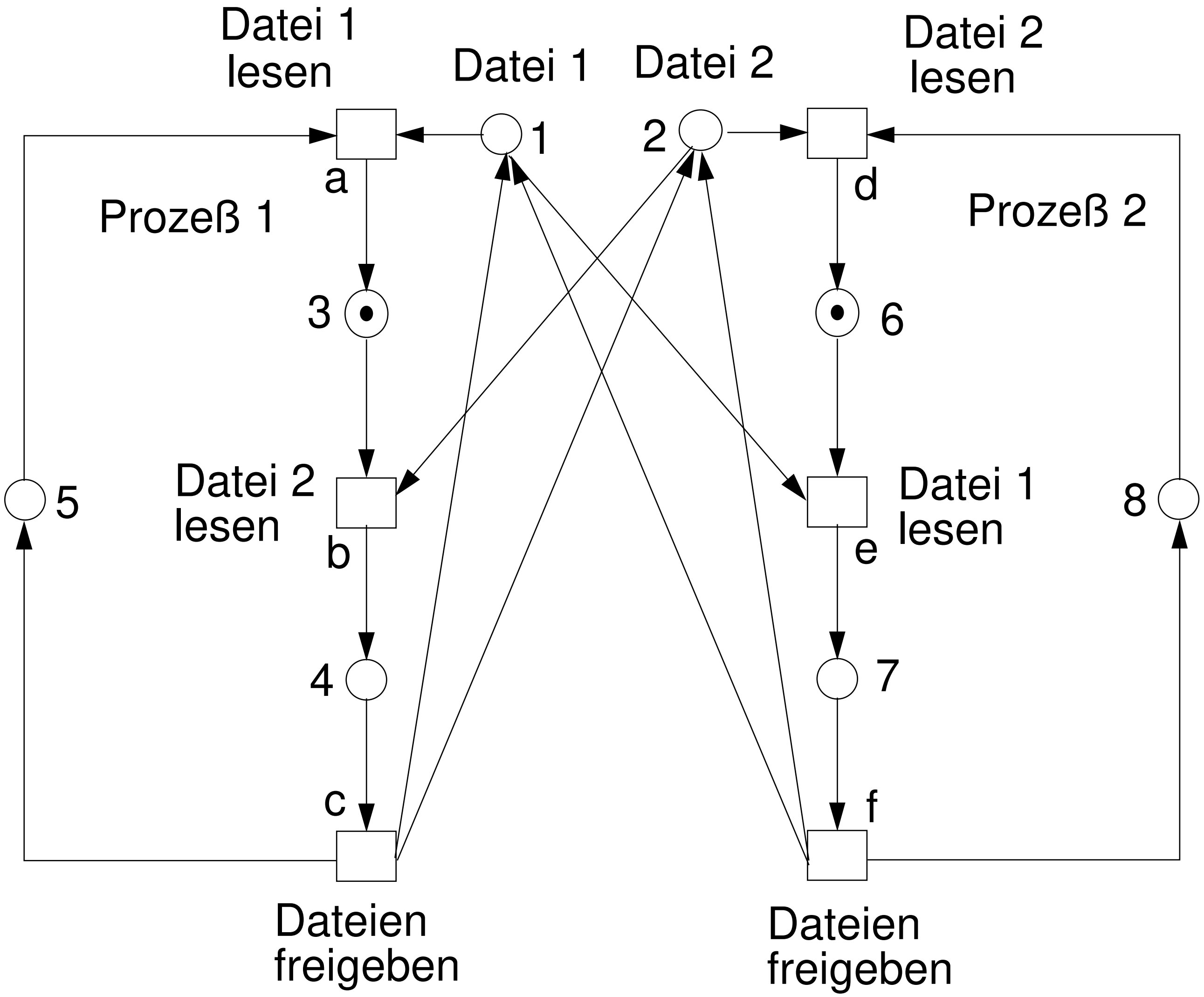
Vorbereich (σ) $:= \{t \mid \exists\, s \in \sigma : (t, s) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die auf Stellen in σ wirken

Nachbereich (σ) $:= \{t \mid \exists\, s \in \sigma : (s, t) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die Stellen in σ als Vorbedingung haben

Dann ist σ eine **Verklemmung, wenn Vorbereich (**σ) $\subseteq$ **Nachbereich** (σ).

Wenn **für alle s** $\in \sigma$ **gilt M (s) = 0**, dann kann es **keine Marken auf Stellen in** σ in einer Nachfolgemarkierung von M geben.

Verklemmung beim Lesen von Dateien



$\sigma = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

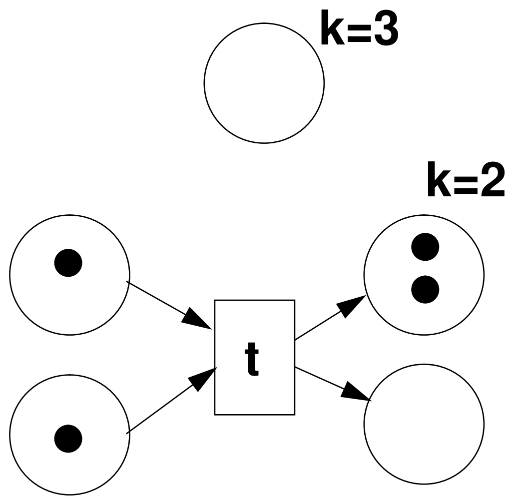
Vorbereich (σ)
$= \{b, c, e, f\}$

Nachbereich (σ)
$= \{a, b, c, d, e, f\}$

$M(\sigma) = 0$

Kapazitäten und Gewichte

Man kann **Stellen eine begrenzte Kapazität** von $k \in \mathbb{N}$ Marken zuordnen.

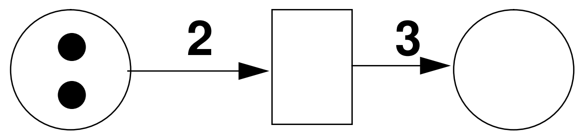


Die Bedingung, dass eine **Transition t schalten kann**, wird erweitert um:

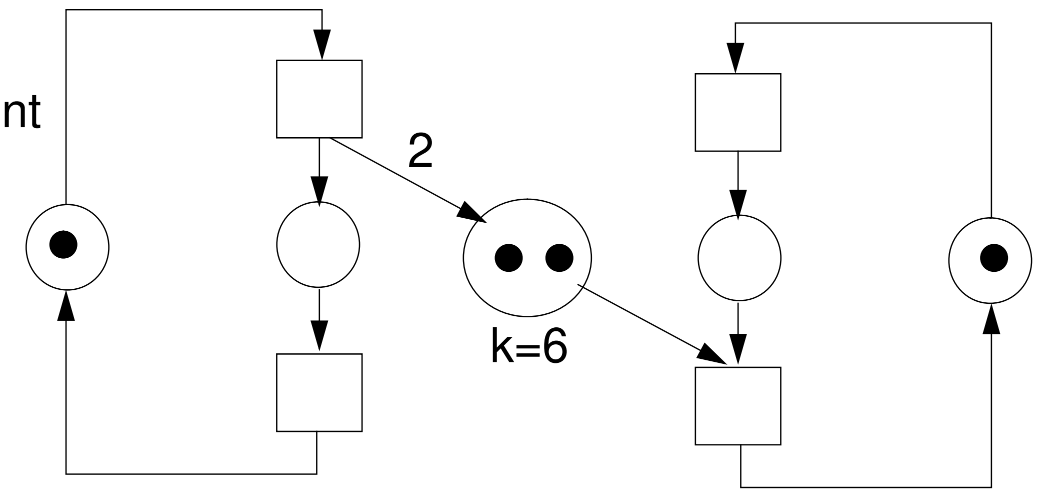
> Die **Kapazität keiner der Stellen im Nachbereich von t darf überschritten** werden.

t kann nicht schalten

Kanten kann ein **Gewicht** $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden: sie bewegen **beim Schalten n Marken**.



Beispiel: **Beschränkter Puffer**



Beispiel: Leser-Schreiber-System

n Leser-Prozesse und **m Schreiber-Prozesse** operieren **auf derselben Datei**.

Mehrere **Leser können zugleich lesen**.

Ein **Schreiber** darf nur dann schreiben, wenn **kein anderer Leser oder Schreiber aktiv** ist.

Modellierung: ein **Schreiber entzieht der Synchronisationsstelle alle n Marken**.