9. Wiederholung

Wunschkonzert – Modellierung WS 2001/2002

Nr.	Thema	# Stimmen	Platzierung
0	nichts	32	
1	Wertebereiche	**110**	**2. Platz**
2	Funktionen, Relationen	66	
3	Terme, Signaturen	64	
4	Substitution, Unifikation	50	
5	Algebren	45	
6	Aussagenlogische Formeln	14	
7	Aussagenlogische Schlüsse	27	
8	Verifikation	**182**	**1. Platz**
9	Prädikatenlogik: Interpretation	**75**	**3. Platz**
10	Prädikatenlogik: Umformungen	59	
11	Graphen: Wegeprobleme	8	
12	Graphen: Verbindungsprobleme	7	
13	Graphen: Bäume	10	
14	Graphen: Zuordnungsprobleme	7	
15	Graphen: Abhängigkeiten	8	
16	KFG: Bäume	5	
17	KFG: Ableitungen	16	
18	Entity−Relationship−Modell	16	
19	ER: Kardinalitäten	24	
20	Endliche Automaten	27	
21	Petri−Netze	21	

Fehler: 0

Anzahl der Stimmen: 873

9.1 Schlussregeln für Algorithmenelemente

Sequenzregel:

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{Q\}\ S_2;\ \{R\}}{\{P\}\ S_1;\ S_2\ \{R\}}$$

Zuweisungsregel:

$$\{\ P^{x}_{e}\ \}\ x := e;\ \{\ P\ \}$$

Wo in P x vorkommt, muss in P^{x}_{e} e stehen.

{P}

S_1;

{Q}

S_2

{R}

{ x = y*(1+q) + (r-y) }

r := r - y;

{ x = y*(1+q) + r }

q := 1 + q;

{ x = y*q + r }

Schlussregel für die Anweisung anwenden

Schlussregel für die Anweisung anwenden

Konsequenzregel:

$$\{R\} \rightarrow \{Q\}$$

in Ausführungsrichtung einfügen, wo nötig.

2-seitige Alternative

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S_1\ \{Q\} \qquad \{P \wedge \neg B\}\ S_2\ \{Q\}}{\{P\}\ \text{falls } B\text{: } S_1 \text{ sonst } S_2\ \{Q\}}$$

{ P }

falls B:

  $\{P \wedge B\}$

  S_1

  { Q }

sonst

  $\{P \wedge \neg B\}$

  S_2

  { Q }

{ Q }

{ true }

falls $a > 0$:

  $\{ true \wedge a > 0 \}$ $\equiv$

  $\{a > 0\}$ b := a; $\{b > 0\} \rightarrow \{ b \geq 0 \}$

  $\{ b \geq 0 \}$

sonst

  $\{true \wedge \neg (a > 0)\}$

  $\{\neg (a > 0) \} \equiv \{ -a \geq 0 \}$ b := - a; $\{ b \geq 0 \}$

  $\{ b \geq 0 \}$

$\{ b \geq 0 \}$

Bedingte Anweisung

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S\ \{Q\} \qquad P \wedge \neg B \rightarrow Q}{\{P\}\ \text{falls}\ B{:}\ S\ \{Q\}}$$

(Bedingter Schritt)

{ P }

falls B:

  {P ∧ B}

  S_1

  { Q }

  // leere Alternative:

  {P ∧ ¬ B} → { Q }

{ Q }

{ true }

falls a < 0:

  {true ∧ a < 0}

  {a < 0} → { -a > 0 }

  a := - a;

  {a > 0} → { a ≥ 0 }

  { a ≥ 0 }

  // leere Alternative:

  {true ∧ ¬ (a < 0)} → { a ≥ 0 }

{ a ≥ 0 }

Schleifenregel

$$\frac{\{P \wedge B\}\ \ S\ \ \{P\}}{\{P\}\text{ solange B wiederhole S }\{P \wedge \neg B\}}$$

{P}
solange B wiederhole
{P ∧ B}
S
{P}
{P ∧ ¬ B}

Schleifeninvariante P

im Beispiel ist P:

$$z * a^b = x^y \wedge b \geq 0$$

a := x; b := y; z := 1;
$\{a = x \wedge b = y \wedge z = 1\} \rightarrow$
$\{z * a^b = x^y \wedge b \geq 0\}$
solange b > 0 wiederhole
$\{z * a^b = x^y \wedge b \geq 0 \wedge b > 0\}$
$\equiv \{z * a * a^{b-1} = x^y \wedge (b-1) \geq 0\}$
b := b - 1;
$\{z * a * a^b = x^y\ b \geq 0\}$
z := z · a;
$\{z * a^b = x^y \wedge b \geq 0\}$

$\{z * a^b = x^y \wedge b \geq 0 \wedge b \leq 0\}$
$\equiv \{z * a^b = x^y \wedge b = 0\} \rightarrow \{z = x^y\}$

Terminierung separat zeigen.

9.2 Wertebereiche

Wertebereich: **Menge gleichartiger Werte** aus dem modellierten Gegenstandsbereich

1. Mengen:

Definition von Mengen durch
Aufzählen der Elemente (extensional): $M := \{1, 4, 9, 16, 25\}$
Angabe einer Bedingung (intensional): $M := \{a \mid a \in \mathbb{N}, \text{a ist Quadratzahl}, a \leq 30\}$

Indexmenge: Menge verwendet zur **eindeutigen Identifikation von Objekten**,
z. B. KartenSymbole := {7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass}
vergleiche Schlüsselattribut im ER-Modell

2. Potenzmengen:

Potenzmenge (powerset) einer Grundmenge U ist die **Menge aller Teilmengen** von U,
geschrieben Pow (U) oder $\wp$ (U). $\text{Pow}(U) := \{ M \mid M \subseteq U \}$

Beispiel: Grundmenge $U := \{a, b\}$ Potenzmenge $\text{Pow}(U) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Kardinalität: $|\text{Pow}(U)| = 2^n$ wenn $|U| = n$

Wertebereich n-stelliger **Relationen**: $\mathbf{Pow}\,(\mathbf{M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n})$

Wertebereich von **Funktionen**: $\mathbf{D \to B \subseteq Pow\,(D \times B)}$

Wertebereiche (2)

3. Kartesisches Produkt:

geordnete **n-Tupel**: $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in M_i \text{ und } i \in I \}$
mit **Indexmenge** $I := \{1, \ldots, n\}$ und $n > 1$

Kardinalität: $| M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n | = \prod_{i \in I} |M_i|$ mit $I = \{1,\ldots, n\}$ mit $n > 1$

Beispiel: Daten := Tage × Monate × Jahre

bei **gleichen Mengen M_i** : $M \times M \times \ldots \times M = M^n$ mit $n > 1$

Beispiel: Wertebereich der Ergebnisse 3-maligen Würfelns: DreiWürfe := $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$

4. Endliche Folgen

von Elementen aus A: n-Tupel über A von beliebiger Länge $n > 0$

$A^+ := \{ x \mid x \in A^i \text{ und } i \geq 1 \}$ d. h. $(a_1, \ldots, a_n) \in A^+$ für $n \geq 1$ und $a_i \in A$

$A^* := A^+ \cup \{ () \}$

Beispiel: $(1, 1, 2, 5, 5, 10, 20) \in \mathbb{N}^+$

Wertebereiche (3)

4. Relationen

n-stellige Relation: $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

$R \in$ **Pow** $(\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})$

Kardinalität ist $|$**Pow** $(\mathbf{M_1} \times \mathbf{M_2} \times \ldots \times \mathbf{M_n})| = 2^{\prod_{i \in I} |\mathbf{Mi}|}$, falls alle $\mathbf{M_i}$ endlich sind.

Beispiel: Oder := {(w, w), (w, f), (f, w)} $\subseteq$ Bool^2

5. Funktionen

Funktion f ist eine 2-stellige Relation f $\subseteq$ D $\times$ B mit folgender Eigenschaft:
Aus (x, y) $\in$ f und (x, z) $\in$ f folgt y = z, d. h. zu einem Urbild x gibt es nur ein Bild y.

Wertebereich D -> B ist die **Menge aller Funktionen, die von D auf B abbilden**.
Es gilt **D -> B $\subseteq$ Pow (D $\times$ B).**

Beispiel: Quadrat := { (a, b) | a $\in \mathbb{N}$ und b = a*a } $\in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Kardinalität des Wertebereiches, aus dem Funktionen stammen $|D \to B| = (|B| + 1)^{|\mathbf{D}|}$
Anzahl der totalen Funktionen in $|D \to B|$ ist $|B|^{|\mathbf{D}|}$

Wertebereiche (4)

Spezielle Funktionen

Identitätsfunktion $\mathbf{id_M}$: M -> M mit id_M := { (x, x) | x∈ M }

Charakteristische Funktion χ_M einer Menge M ⊆ U, mit der Trägermenge U gibt an, welche Elemente der Trägermenge U in M enthalten sind.

Prädikate: Funktionen mit Bildbereich Bool, z. B. <= : $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ -> Bool

Funktionen zur Modellierung von **mehrfachen Vorkommen** (**Multimengen, bags)**:
b: V -> $\mathbb{N}_0$ gibt für jeden Wert aus V an, wie oft er vorkommt

z. B. geldBeutel: brdMünzen -> $\mathbb{N}_0$
mit geldBeutel := {(1,3), (2, 0), (5,0), (10, 2), (50, 1), (100, 3), (200, 2), (500, 1)}

6. disjunkte Vereinigung

Wertebereiche $A_1, A_2, ..., A_n$ zu einem **vereinigten Wertebereich V** zusammengefasst .
Die Herkunft der Elemente aus A_i wird in den Paaren von V gekennzeichnet:

$\mathbf{V := \{ (i, a_i) \mid a_i \in A_i \}}$ wobei I := {1, .1, ..., n}

Die erste Komponente der Paare ist eine **Kennzeichenkomponente** (tag field).
Die A_i brauchen nicht paarweise disjunkt zu sein.

Kardinalität: $|V| = \sum_{i \in I} |A_i|$

9.3 Interpretation prädikatenlogischer Formeln

Prädikatenlogische Formel besteht aus:	**Beispiel:**	**Interpretation $\Im$ legt fest:**
	$\forall x\ P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Individuenbereich U := { ... }
atomaren Formeln	$P(x, f(x))$ $Q(g(a, z))$	
mit **Prädikatssymbolen**	P Q	Prädikate $\Im(P) := \{ (a, b) \mid ...\}$
Termen als Parametern	x f(x) g(a, z)	
Funktionssymbolen	f g a	Funktionen $\Im(f)(n)$ -> n+1
freien Variablen	z	Variablenwerte $\Im(z) := 3$
gebundenen Variablen	x	
Formeln mit **logischen Junktoren**	$P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Verknüpfung gemäß AL
Quantor-Formeln	$\forall x\ P(x, f(x)) \wedge Q(g(a, z))$	Bindung jedes Wertes aus U an Variable; Auswertung gemäß Bedeutung von $\forall$ und $\exists$

Auswertung von Quantor-Formeln

$\forall x\ F(x)$ jeden Wert aus U einsetzen und Ergebnisse mit $\wedge$ verknüpfen: $F(u_1) \wedge F(u_2) \wedge \ldots$

$\exists x\ F(x)$ jeden Wert aus U einsetzen und Ergebnisse mit $\vee$ verknüpfen: $F(u_1) \vee F(u_2) \vee \ldots$

Wenn man einen Wert findet, der das Ergebnis bestimmt,
$F(u_i) = f$ bei $\forall$ bzw. $F(u_j) = w$ bei $\exists$, braucht man nicht alle aufzuzählen.

Beispiel:

$U := \{ 1, 2, 3 \}$ $\mathfrak{I}(P) := \{ (a, b) \mid a + b < 5 \}$

$\exists x$	$\forall y$	$P(x, y)$				
1	1	w	$\wedge$			
1	2	w	$\wedge$			
1	3	w	=	**w**	$\vee$	← hier steht das Ergebnis fest
2	1	w	$\wedge$			
2	2	w	$\wedge$			
2	3	f	=	f	$\vee$	
3	1	w	$\wedge$			
3	2	f	$\wedge$			
3	3	f	=	f	= **w**	