6.2 Petri-Netze

Petri-Netz (auch Stellen-/Transitions-Netz):
Formaler Kalkül zur **Modellierung von Abläufen mit nebenläufigen Prozessen** und kausalen Beziehungen

Basiert auf **bipartiten gerichteten Graphen**:

- **Knoten** repräsentieren **Bedingungen**, Zustände bzw. **Aktivitäten**.
- **Kanten** verbinden **Aktivitäten** mit ihren **Vor- und Nachbedingungen**.
- **Knotenmarkierung** repräsentiert den veränderlichen **Zustand des Systems**.
- **graphische Notation**.

C. A. Petri hat sie 1962 eingeführt.
Es gibt zahlreiche Varianten und Verfeinerungen von Petri-Netzen. Hier nur die Grundform.

Anwendungen von Petri-Netzen zur Modellierung von

- realen oder abstrakten Automaten und Maschinen
- kommunizierenden Prozessen in der Realität oder in Rechnern
- Verhalten von Hardware-Komponenten
- Geschäftsabläufe
- Spielpläne

Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 612

Ziele:

Einführung zu Petri-Netzen

in der Vorlesung:

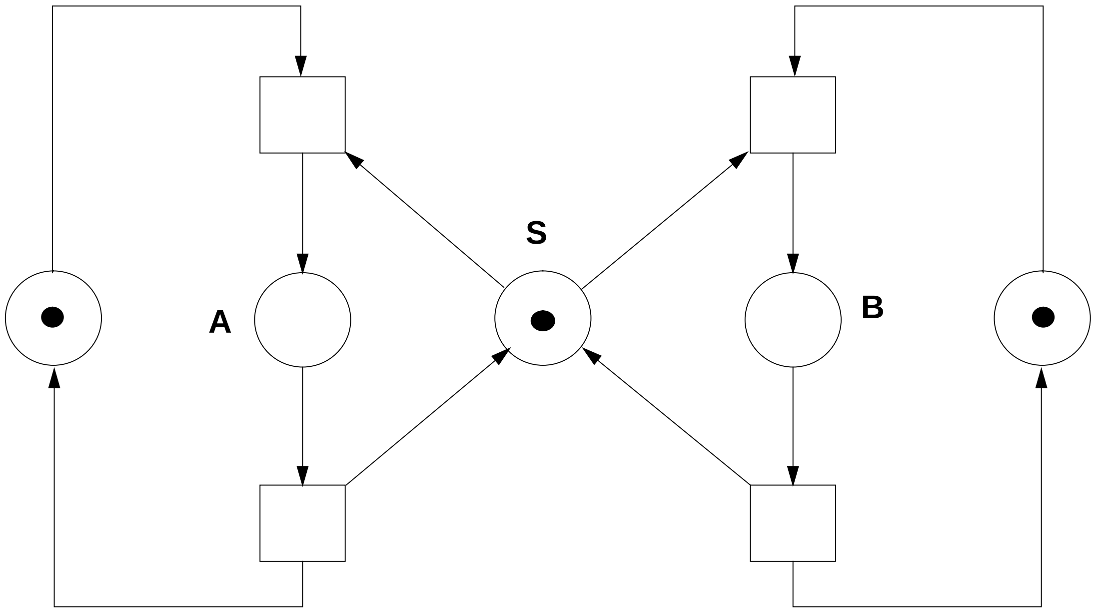
Erläuterungen dazu

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Einführendes Beispiel

Das Petri-Netz modelliert zwei **zyklisch ablaufende Prozesse**.
Die mittlere Stelle synchronisiert die beiden Prozesse,
so dass sie sich **nicht zugleich in den Zuständen A und B** befinden können.
Prinzip: **gegenseitiger Ausschluss** durch **Semaphor**



Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 613

Ziele:

Eindruck von Petri-Netzen

in der Vorlesung:

informelle Erläuterungen zu

- parallelen Prozessen
- gegenseitigem Ausschluss
- Markierung und Schalten in Petri-Netzen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Definition von Petri-Netzen

Ein **Petri-Netz** ist ein Tripel P = (S, T, F) mit

- S **Menge von Stellen**,
  repräsentieren Bedingungen, Zustände; graphisch Kreise
- T **Menge von Transitionen** oder Übergänge,
  repräsentieren Aktivitäten; graphisch Rechtecke
- F **Relation** mit $F \subseteq S \times T \cup T \times S$
  repräsentieren kausale oder zeitliche Vor-, Nachbedingungen von Aktivitäten aus T

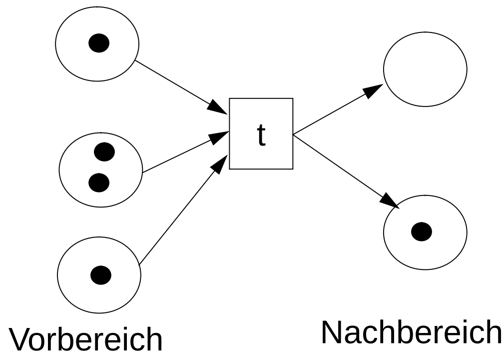
P bildet einen **bipartiten, gerichteten Graphen** mit den Knoten $S \cup T$ und den Kanten F.

Zu einer **Transition t** in einem Petri-Netz P sind die Stellenmengen definiert

Vorbereich (t) := $\{ s \mid (s, t) \in F\}$

Nachbereich (t) := $\{ s \mid (t, s) \in F\}$

Der **Zustand des Petri-Netzes** wird durch eine **Markierungsfunktion** angegeben, die jeder Stelle eine **Anzahl von Marken** zuordnet:
$M_P: S \rightarrow \mathbb{N}_0$



Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 614

Ziele:

Petri-Netz formal verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu den Begriffen

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Verständnisfragen:

Welche Arten von Kanten kann es in einem Petri-Netz nicht geben?

Schaltregel für Petri-Netze

Das **Schalten einer Transition** t überführt eine Markierung M in eine Markierung M‘.

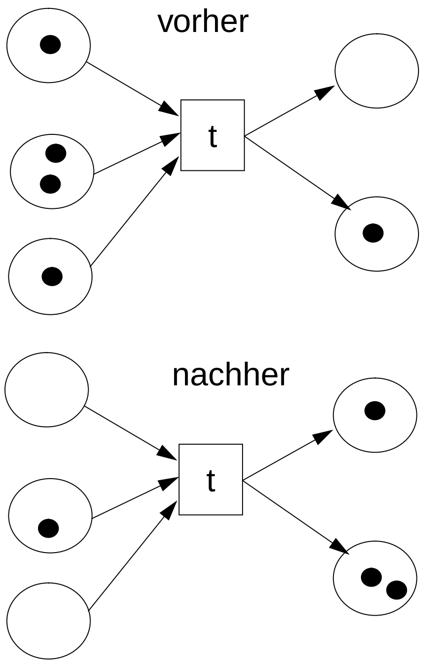
Eine **Transition t kann schalten**, wenn für alle Stellen s ∈ Vorbereich (t) gilt M(s) ≥ 1.

Wenn eine Transition t **schaltet,** gilt für die **Nachfolgemarkierung M‘**:

M‘(v) = M(v) - 1 für alle v ∈ Vorbereich(t) \ Nachbereich(t)

M‘(n) = M(n) + 1 für alle n ∈ Nachbereich(t) \ Vorbereich(t)

M‘(s) = M(s) sonst



Wenn in einem Schritt **mehrere Transitionen schalten können**, wird eine davon **nicht-deterministisch ausgewählt**.

Wir sagen, eine **Markierung M_2 ist von einer Markierung M_1 aus erreichbar**, wenn es ausgehend von M_1 eine Folge von Transitionen gibt, die nacheinander schalten und M_1 in M_2 überführen.

Zu jedem Petri-Netz wird eine **Anfangsmarkierung M_0** angeben.

Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 615

Ziele:

Schaltregel verstehen

in der Vorlesung:

- Schaltregel erläutern
- nicht-deterministische Auswahl zeigen,
- Konflikt zwischen mehreren Transitionen, die Schalten können: Vorbereiche sind nicht disjunkt

nachlesen:

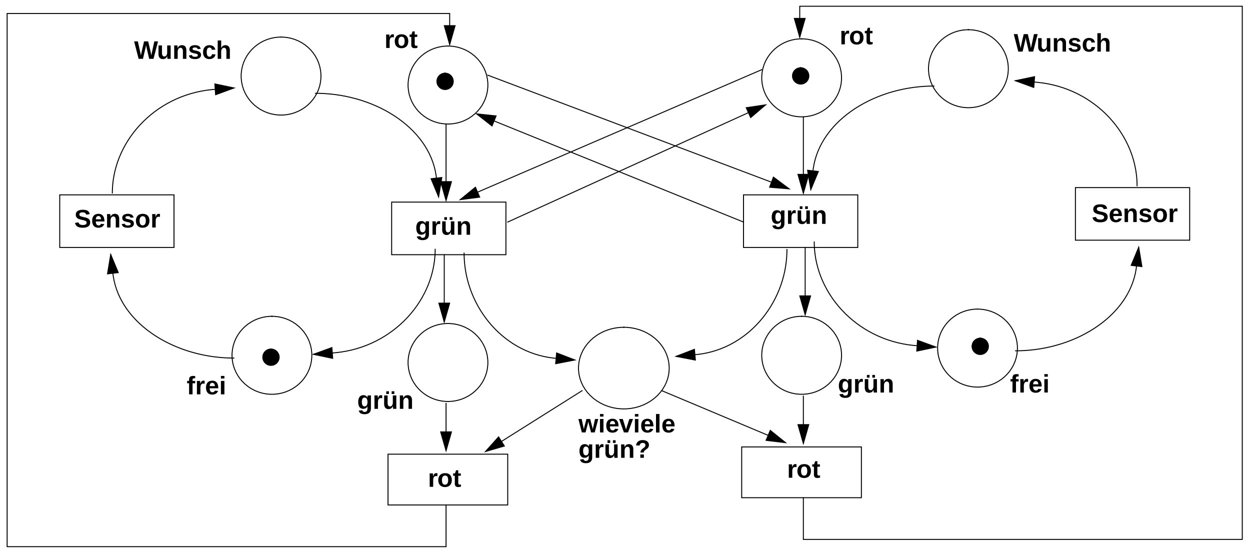
G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Beispiel für ein binäres Netz

Ein Petri-Netz heißt **binär (sicher)**, wenn für alle aus M_0 erreichbaren Markierungen M und für alle Stellen s gilt $M(s) \leq 1$.

Petri-Netze, deren **Stellen Bedingungen repräsentieren** müssen binär sein.

Beispiel: Modellierung einer Sensor-gesteuerten Ampelkreuzung:



aus: B. Baumgarten: Petri-Netze, Bibliographisches Institut & F. A. Brockhaus AG, 1990

Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 616

Ziele:

Stellen als Bedingungen verstehen

in der Vorlesung:

- Erläuterungen zu dem Beispiel,
- Vor- und Nachbedingungen diskutieren,
- Eigenschaften diese Modells diskutieren

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Lebendige Petri-Netze

Petri-Netze modellieren häufig **Systeme, die nicht anhalten** sollen.

Ein Petri-Netz heißt **schwach lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung eine Nachfolgemarkierung gibt.

Eine **Transition t heißt lebendig**, wenn es zu jeder von M_0 erreichbaren Markierung M' eine Markierung M" gibt, die von M' erreichbar ist, und in der t schalten kann.

Ein **Petri-Netz heißt lebendig**, wenn alle seine Transitionen lebendig sind.

Verklemmung: Ein System kann unerwünscht anhalten,
weil das **Schalten einiger Transitionen zyklisch voneinander abhängt**.

Sei: $\sigma \subseteq S$ eine Teilmenge der Stellen eines Petri-Netzes und

Vorbereich (σ) $:= \{t \mid \exists\, s \in \sigma : (t, s) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die auf Stellen in σ wirken

Nachbereich (σ) $:= \{t \mid \exists\, s \in \sigma : (s, t) \in F\}$,
d. h. die Transitionen, die Stellen in σ als Vorbedingung haben

Dann ist σ eine **Verklemmung, wenn Vorbereich (**σ) $\subseteq$ **Nachbereich** (σ).

Wenn **für alle s** $\in$ σ **gilt M (s) = 0**, dann kann es **keine Marken auf Stellen in** σ in einer Nachfolgemarkierung von M geben.

Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 617

Ziele:

Begriffe zur Lebendigkeit von Netzen verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterungen zu

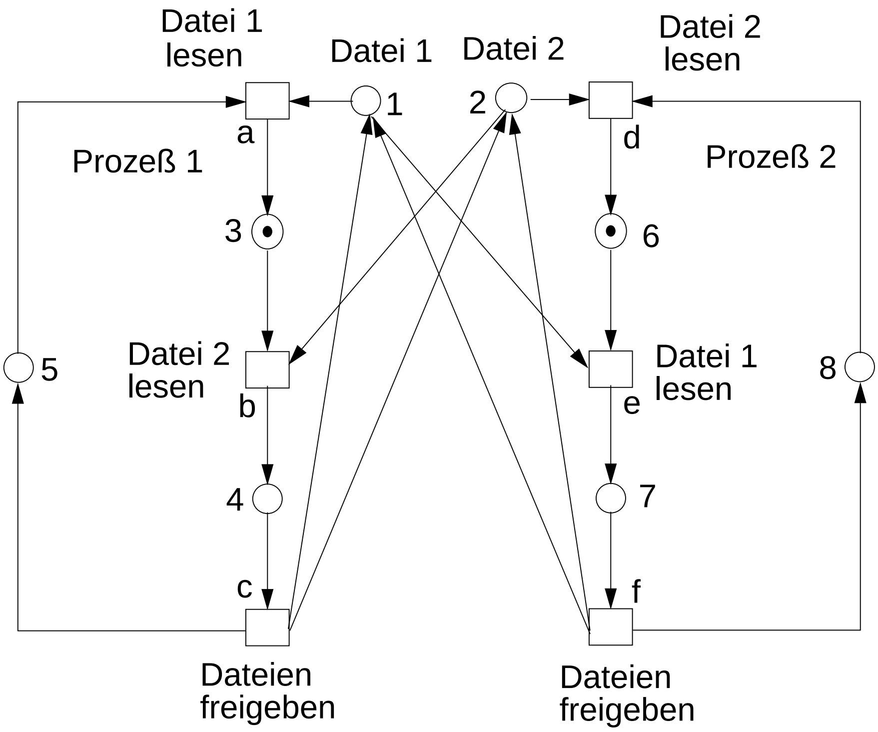
- nicht-terminierenden Systemen,
- Lebendigkeitsbegriffen,
- Verklemmungen

am Beispiel von Mod-6.18

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Verklemmung beim Lesen von Dateien



$\sigma = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

Vorbereich (σ)
$= \{b, c, e, f\}$

Nachbereich (σ)
$= \{a, b, c, d, e, f\}$

$M(\sigma) = 0$

Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 618

Ziele:

Beispiel für eine Verklemmung

in der Vorlesung:

Erläuterung:

- Jeder der Prozesse fordert nacheinander zwei Dateien an und gibt sie dann beide wieder frei.
- Die Verklemmung tritt ein, wenn jeder Prozess eine Datei belegt und auf die andere wartet.
- Sigma charakterisiert diese Situation.
- Es gibt verschiedene Techniken, die Verklemmung zu vermeiden, z. B.
- Bei einem Prozess die Reihenfolge der Dateien vertauschen.
- Beide Dateien zugleich anfordern.

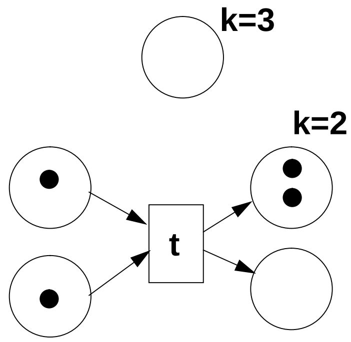
nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

Kapazitäten und Gewichte

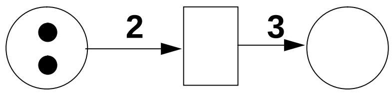
Man kann **Stellen eine begrenzte Kapazität** von $k \in \mathbb{N}$ Marken zuordnen.

Die Bedingung, dass eine **Transition t schalten kann**, wird erweitert um:
Die **Kapazität keiner der Stellen im Nachbereich von t darf überschritten** werden.

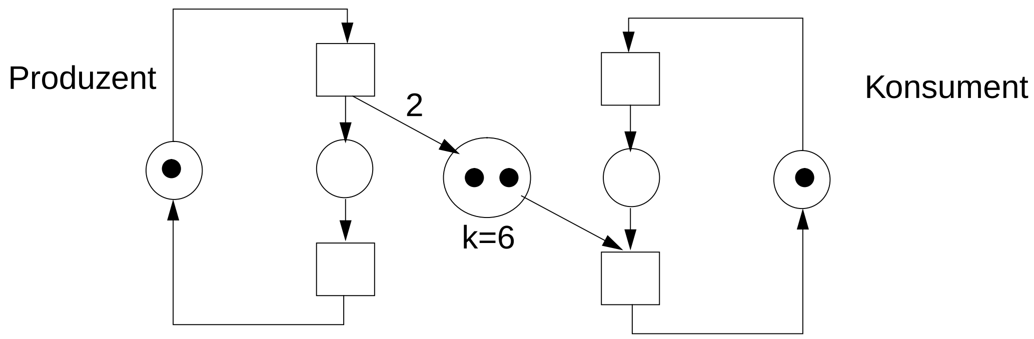


t kann nicht schalten

Kanten kann ein **Gewicht** $n \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden: sie bewegen **beim Schalten n Marken**.



Beispiel: **Beschränkter Puffer**



Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 619

Ziele:

Konzepte verstehen

in der Vorlesung:

Erläuterung der beiden Konzepte am Beispiel.

- Schaltregel wird ergänzt.
- Produzent liefert immer 2 Einheiten zugleich (Kantengewicht 2).
- Produzent kann nur liefern (schalten), wenn die Pufferstelle noch freie Kapazitähat.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5

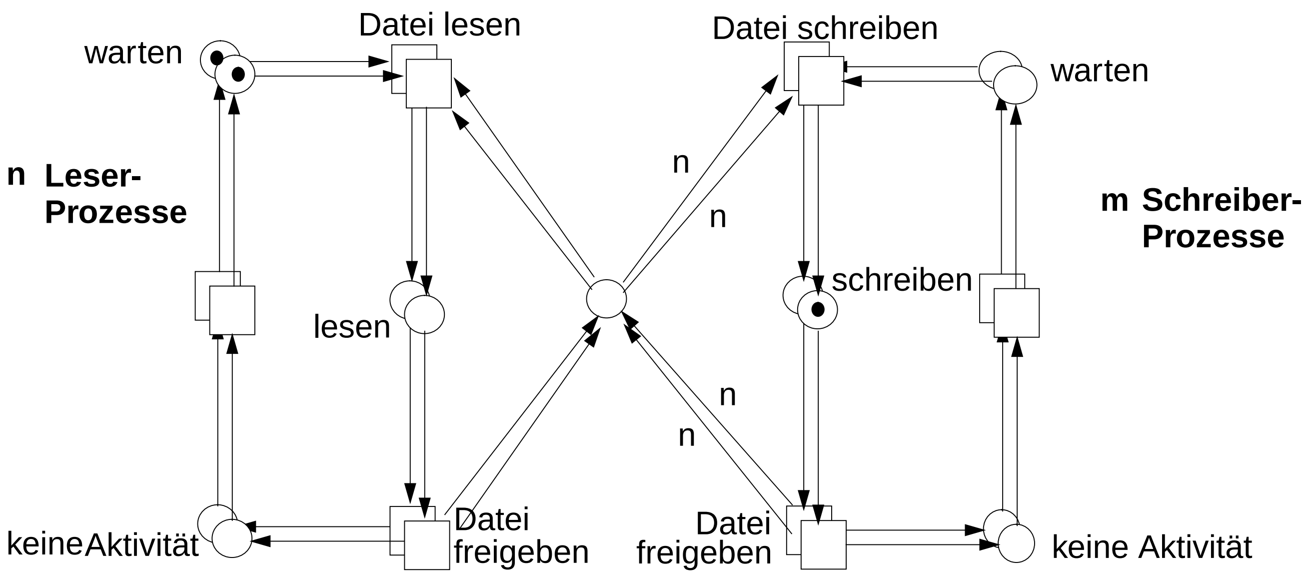
Beispiel: Leser-Schreiber-System

n Leser-Prozesse und **m Schreiber-Prozesse** operieren **auf derselben Datei**.

Mehrere **Leser können zugleich lesen**.

Ein **Schreiber** darf nur dann schreiben, wenn **kein anderer Leser oder Schreiber aktiv** ist.

Modellierung: ein **Schreiber entzieht der Synchronisationsstelle alle n Marken**.



Vorlesung Modellierung WS 2000/2001 / Folie 620

Ziele:

Beispiel für Kapazitäten und Gewichte

in der Vorlesung:

- Erläuterung des Leser-Schreiber-Systems.
- Allerdings können wechselnde Leser die Schreiber auf Dauer blockieren. Das Petri-Netz ist nicht fair.

nachlesen:

G. Goos: Vorl. über Informatik Bd.1, Abschnitt 2.5