Klausur: Modellierung

Prof. Dr. U. Kastens, Universität Paderborn

Wintersemester 2001/2002

01.03.2002, 9:00 − 11:00 Uhr

Nachname: ____________________ **Vorname:** ___________________

Matrikelnummer: ____

Bitte genau durchlesen!

- Schreiben Sie zu Beginn der Klausur auf die **erste Seite** in **Blockschrift** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Ohne diese Angaben wird die Klausur **nicht** gewertet.
- Verwenden Sie **keinen Rotstift** und **keinen Bleistift**.
- Lassen Sie die Klausur **zusammengeheftet**.
- Verwenden Sie **kein eigenes Papier**. Sie können **die letzten drei Seiten** der Klausur **abreißen** und als Konzeptpapier verwenden. Weiteres Papier erhalten Sie von der Klausuraufsicht.
- Schreiben Sie Ihre **Lösungen** in die dafür **vorgesehenen Freiräume**.
- Benutzen Sie die **Rückseiten** des Klausurpapiers falls Sie **nicht ausreichend Platz** für Ihre Lösung haben sollten.
- Streichen Sie ungültige Lösungen durch und kennzeichnen Sie Ihre Lösung eindeutig. Die Aufgabe gilt als **nicht gelöst**, wenn Sie **mehr als eine Lösung** angeben.
- Als einziges Hilfsmittel ist **ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN−A4−Blatt** erlaubt. Schreiben Sie auf dieses Blatt ebenfalls Ihren Namen.
- Die Klausur ist mit Sicherheit **bestanden**, wenn **mindestens die Hälfte** der Punkte erreicht wird.

Viel Erfolg!

Aufgaben	**Max. Pkt.**	**Punkte**
1. Verständnisfragen	10	
2. Terme und Algebren	10	
3. Logik	10	
4. Graphen	10	
5. Endl. Automaten / Petri−Netze	10	
6. Busverkehr in Paderborn	10	
Summe:	**60**	

Note	**Bonus**	**Endnote**

Aufgabe 1: Verständnisfragen (10 Punkte)

(a) Geben Sie den Wertebereich **Pow({a}**×**{1,2})** als extensionale Menge an.

(b) Geben Sie die folgende Vorbedingung so an, dass die Zuweisungsregel korrekt und präzise angewandt ist.

{ } x := a { x > 5 ∧ **x = a }**

(c) Zeigen Sie, dass folgende kontextfreie Grammatik mehrdeutig ist.

S ::= A
A ::= A b A
A ::= a

(d) Wieviel Brückenkanten hat ein ungerichteter Baum mit *n* Knoten?

(e) Schreiben Sie folgende Formel in ausführlicher Notation.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}\mathbf{:}\ \exists \mathbf{y} \in \mathbb{Z}\mathbf{:}\ \mathbf{x+y} = \mathbf{0}$$

(f) Welchen Term ergibt folgende Substitution?

(x * f(z) + y) [x/f(y), y/z]

Aufgabe 2: „Terme und Algebren“ (10 Punkte)

Die folgende abstrakte Algebra *Binärbaum* = (τ, Σ, Q) ist bereits aus den Übungen bekannt:

Signatur: Σ = (S, F)

$$
\begin{array}{lllll}
S = \{ & \text{BinTree, Element, BOOL} \ \} & & & \\
F = \{ & \text{create:} & & \to \text{BinTree}, & (F_1) \\
 & \text{node:} & \text{BinTree} \times \text{Element} \times \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_2) \\
 & \text{left:} & \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_3) \\
 & \text{right:} & \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_4) \\
 & \text{value:} & \text{BinTree} & \to \text{Element}, & (F_5) \\
 & \text{empty:} & \text{BinTree} & \to \text{BOOL} \quad \} & (F_6)
\end{array}
$$

Axiome:
Seien l, r Terme der Sorte BinTree und v ein Term der Sorte Element:

$$
\begin{array}{llll}
Q = \{ & \text{empty(create)} & \equiv \text{true}, & (Q_1) \\
 & \text{empty(node(l,v,r))} & \equiv \text{false}, & (Q_2) \\
 & \text{left(node(l,v,r))} & \equiv \text{l}, & (Q_3) \\
 & \text{right(node(l,v,r))} & \equiv \text{r}, & (Q_4) \\
 & \text{value(node(l,v,r))} & \equiv \text{v} \quad \} & (Q_5)
\end{array}
$$

Beschreibung:

Die Sorte *BinTree* stellt einen Binärbaum dar, die Sorte *Element* beschreibt den Inhalt eines Knotens. *BOOL* soll dem Wertebereich { *true*, *false* } zugeordnet werden.

Die Konstante *create* steht für den leeren Baum. Die Operation *node* erzeugt einen neuen Wurzelknoten und verbindet einen linken und einen rechten Teilbaum zu einem neuen Binärbaum.

Die Operationen *left* bzw. *right* liefern den linken bzw. rechten Teilbaum eines Baumes.

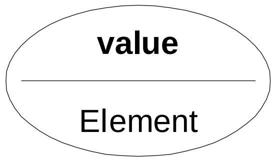
Die Operation *value* liefert den Inhalt des Wurzelknotens eines Baumes und die Operation *empty* zeigt an, ob der Baum leer ist oder nicht.

Hinweis: Im Folgenden seien a,b,c Konstante der Sorte Element.

(a) Es sei folgender Term gegeben:

value(node(left(node(create,a,create)),b,node(create,c,create)))

1. Stellen Sie den Term als Kantorowitsch−Baum dar. Notieren Sie in jedem Knoten den Namen der Operation und die entsprechende Ergebnissorte:



2. Stellen Sie den Term in Postfixform dar.

(b) Erweitern Sie die oben angegebene abstrakte Algebra um die Operation „sum“. Diese Operation soll die Summe aller Elemente in den Knoten eines gegebenen Binärbaumes berechnen.

Nehmen Sie an, dass die Operation „add“ bereits gegeben ist. Sie addiert zwei Werte der Sorte Element. Neutrales Element der Addition sei „null“.

Hinweis: Geben Sie keine Axiome für die Operation „add“ an.

F' = F $\cup$ { add: Element $\times$ Element $\rightarrow$ Element, **null: $\rightarrow$ Element**,   **}**
Q' = Q $\cup$ {   **}**

(c) Klassifizieren Sie die folgenden Operationen der abstrakten Algebra:

Operation	***Klassifikation***
node	
sum	
left	

(d) Es sei folgender Term gegeben:

node(right(node(create, a, create)),
value(node(create, b, create)),
create)

Formen Sie den Term in Normalform um. Geben Sie in jedem Umfor−mungsschritt das benutzte Axiom Q_x an.

Aufgabe 3: „Logik“ (10 Punkte)

(a) **Aussagenlogik:**

Zeigen Sie, dass der folgende logische Schluss nicht korrekt ist. Füllen Sie die Wahrheitsstafel von oben nach unten solange, bis Sie ein Gegen− beispiel finden:

$$\{ (u \vee s) \rightarrow t, \neg u \} \models \neg s$$

u	s	t	
w	*w*	*w*	
w	*w*	*f*	
w	*f*	*w*	
w	*f*	*f*	
f	*w*	*w*	
f	*w*	*f*	
f	*f*	*w*	
f	*f*	*f*	

Der logische Schluss ist nicht korrekt, weil:

(b) **Prädikatenlogik:**

Formen Sie die folgende Formel um, so dass **kein Implikationszeichen** mehr vorkommt, **Negationszeichen** nur unmittelbar vor den **Prädikaten** stehen und alle **Quantoren ganz außen** stehen:

$$\exists y \, ((\forall z \, P (z)) \rightarrow \exists x \, Q (y , x))$$

(c) **Verifikation:**

Vervollständigen Sie die Verifikation der folgenden Schleife. Tragen Sie im Vordruck zwischen den Anweisungen alle Aussagen ein, die für die Anwendungen der Schlussregeln nötig sind.

$\{n > 0\}$

x := 0

y := 0;

$\{n \geq y \wedge x = 5 * y\} \equiv INV$

solange y < n wiederhole:

$\{INV \wedge y < n\}$

x := x + 5;

y := y + 1;

$\rightarrow \{x = 5 * n\}$

Aufgabe 4: „Graphen“ (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie den folgenden als Adjazenzliste gegebenen **ungerichteten** Graphen:

1: (2,3,4,6)
2: (1,3)
3: (1,2,4)
4: (1,3,5,6)
5: (4,6)
6: (1,4,5)

1. Stellen Sie den Graphen als Adjazenzmatrix dar. Fassen Sie ihn als **ungerichteten** Graphen auf und zeichnen Sie ihn.

2. Gibt es einen Hamilton−Kreis? Geben Sie gegebenenfalls einen solchen an.

3. Gibt es einen Euler−Weg? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Alf, Bert, Calimero, Donald, Ernie, Frodo, Goofy und Harry wollen einen Spieleabend veranstalten. Allerdings wollen Alf und Bert, Alf und Donald, Alf und Frodo, Alf und Goofy, Ernie und Bert, Ernie und Goofy, Calimero und Frodo, und Calimero und Harry nicht miteinander spielen.

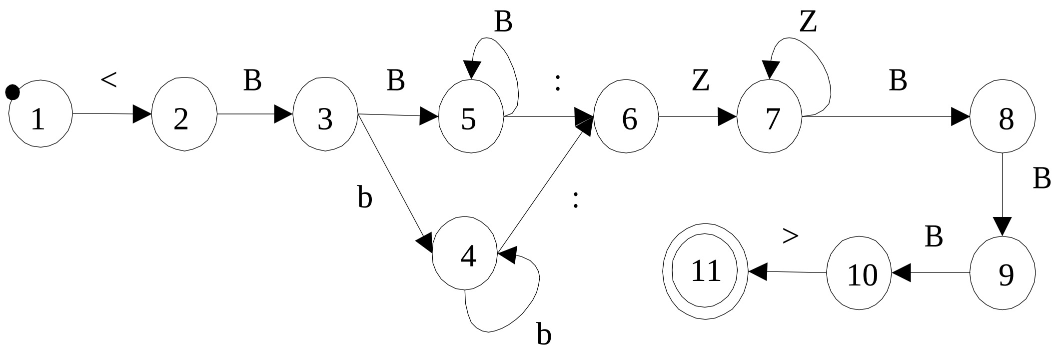
1. Modellieren Sie diese Situation mit Hilfe eines Graphen.

2. Wie viele Gruppen benötigt man mindestens, damit die Wünsche erfüllt werden? Geben Sie die Gruppen einer solchen Lösung als Mengen von Personen an.

Aufgabe 5: „Endl. Automaten/Petri−Netze“ (10 Punkte)

(a) **Endliche Automaten:**

Ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma = \{$ B, b, Z, ’:’, ’<’, ’>’ $\}$ sei gegeben:

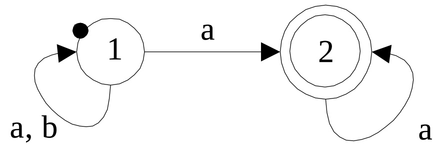


Geben Sie die durch A akzeptierte Sprache L(A) als regulären Ausdruck an:

L(A) =

(b) **Endliche Automaten:**

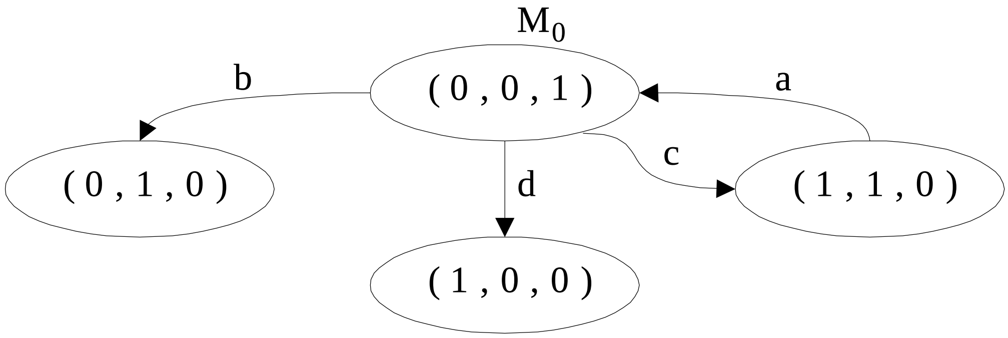
Gegeben sei der folgende nichtdeterministische, endliche Automat B über dem Alphabet $\Sigma = \{ a, b \}$



Konstruieren Sie dazu einen entsprechenden deterministischen, endlichen Automaten nach dem Ihnen bekannten Verfahren aus der Vorlesung.

(c) **Petri−Netze:**

Gegeben sei der folgende Markierungsgraph. Konstruieren Sie das zugehörige Petri−Netz.



Aufgabe 6: „Busverkehr in Paderborn“ (10 Punkte)

Im Folgenden sei der Busverkehr in Paderborn der Gegenstand der Modellierung. Es seien **Haltestellen** die Menge aller Haltestellen, **Liniennummern** die Menge aller Buslinien in Paderborn und **Busfahrer** die Menge aller Mitarbeiter der Pesag, die Bus fahren, gegeben.

(a) **Wertebereiche:**

1. Eine Fahrstrecke ist eine Folge von bestimmten Haltestellen. Geben Sie den Wertebereich für Fahrstrecken an.

   Fahrstrecken = ____

2. Geben Sie den Wertebereich von Funktionen an, die die Zuordnung zwischen den **Liniennummern** und **Fahrstrecken** beschreiben.

   Verkehrsnetz = ____

3. Die Pesag möchte Statistiken führen, die beschreiben, wie oft ihre Busfahrer bestimmte Linien fahren. Geben Sie den Wertebereich für solche Statistiken an.

   Statistiken = ____

(b) **Entity−Relationship:**

Jeder Mitarbeiter der Pesag besitzt als Eigenschaften eine eindeutige Personalnummer, Namen und Vornamen. Ein Busfahrer ist ein Mitar− beiter. Betrachten wir den Zeitpunkt Samstag um 17:15 Uhr: ein Bus− fahrer kann einen Bus steuern, ein Bus wird von genau einem Fahrer gesteuert oder ist unbenutzt. Ein Bus kann mit maximal 50 Insassen fah− ren. Jeder Bus ist durch sein Nummernschild eindeutig identifizierbar. Jeder Insasse besitzt einen eindeutigen Personalausweis und fährt mit genau einem Bus.

Modellieren Sie das ganze Szenario mit einem ER−Diagramm und definieren Sie sinnvolle Kardinalitäten.

Mitarbeiter

(c) **Endliche Automaten:**

Eine Fahrkarte kostet 3 Euro. Es werden nur **1 Euro** und **2 Euro** vom Fahrkartenautomaten als Geldeinwurf akzeptiert. Das Geld muss passend eingeworfen werden.

Modellieren Sie alle passenden Einwürfe der Geldstücke durch einen deterministischen, endlichen Automaten.