Klausur: Modellierung

Prof. Dr. U. Kastens, Universität Paderborn
Wintersemester 2000/2001
22.02.2001, 15:00 − 17:00 Uhr

Name: ____

Matrikelnummer: ______________________________________

Bitte genau durchlesen!

- Schreiben Sie zu Beginn der Klausur auf die **erste Seite** in **Blockschrift** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Ohne diese Angaben wird die Klausur **nicht** gewertet.
- Verwenden Sie **keinen Rotstift** und **keinen Bleistift**.
- Lassen Sie die Klausur **zusammengeheftet**.
- Verwenden Sie **kein eigenes Papier**. Sie können **die letzten drei Seiten** der Klausur **abreißen** und als Konzeptpapier verwenden. Weiteres Papier erhalten Sie von der Klausuraufsicht.
- Schreiben Sie Ihre **Lösungen** in die dafür **vorgesehenen Freiräume**.
- Benutzen Sie die nicht bedruckten **Rückseiten** des Klausurpapiers falls Sie **nicht ausreichend Platz** für Ihre Lösung haben sollten.
- Streichen Sie falsche Lösungen durch und kennzeichnen Sie Ihre Lösung eindeutig. Die Aufgabe gilt als **nicht gelöst**, wenn Sie **mehr als eine Lösung** angeben.
- Als einziges Hilfsmittel ist **ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN−A4−Blatt** erlaubt. Schreiben Sie auf dieses Blatt ebenfalls Ihren Namen.
- Die Klausur ist mit Sicherheit **bestanden**, wenn **mindestens die Hälfte** der Punkte erreicht wird.

Viel Erfolg!

Aufgaben	**Max. Pkt.**	**Punkte**
1. Verständnisfragen	10	
2. Wertebereiche	10	
3. Terme und Algebren	10	
4. Logik	10	
5. Graphen	10	
6. Kontextfreie Grammatiken	10	
Summe:	**60**	

Note	**Bonus**	**Endnote**

Aufgabe 1: „Verständnisfragen“ (10 Punkte)

(a) Wenden Sie die folgende Substitution auf den angegebenen Term an:

(f(x) − x*y) [x*y/x, z+1/y] = ______________________________

(b) Geben Sie zu folgenden Termen einen allgemeinsten Unifikator an.
(x, y, z, u sind Variable)

f(g(y), x, 2) und **f(g(z), h(u), u)**

Allgemeinster Unifikator: ______________________________

Geben Sie den Term an, den man durch Anwenden des Unifikator erhält:

____

(c) Ein vollständiger Binärbaum habe die Höhe x.

Wieviele Blätter hat er? ______________________________

Wieviele Knoten hat er? ______________________________

(d) Gegeben sind die Vor− und Nachbedingung einer bedingten Anweisung. Geben Sie alle Aussagen und Zwischenschritte nach den Hoare’schen Schlussregeln an:

{ x ≥ 0 }
falls x gerade:

x := x + 1;

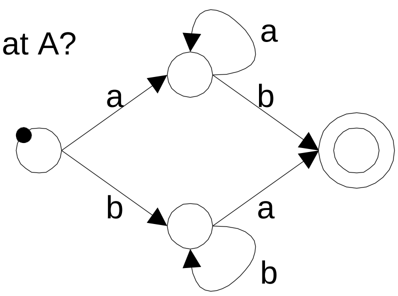
{ x > 0 ∧ x ungerade }

(e) Geben Sie im ER−Modell eine Relation "darf bedienen" zwischen Arbeitern und Maschinen an. Drücken Sie folgende Regeln durch Kardinalitäten aus:

- Für jede Maschine gibt es mindestens zwei Arbeiter.
- Arbeiter dürfen höchstens drei Maschinen bedienen.

Zeichnen Sie das ER−Diagramm:

(f) Welche Sprache akzeptiert folgender Automat A? Geben Sie die Sprache durch eine Formel oder einen präzisen Satz an.



(g) Skizzieren Sie einen einfachen Ausschnitt aus einem Petri−Netz, in dem zwei Transitionen schalten können, aber nur eine davon schalten wird.

Aufgabe 2: „Wertebereiche“ (10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie ein Brettspiel mit Wertebereichen modellieren. Verwenden Sie ausschließlich die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0$ als vordefinierten Wertebereich.

(a) Auf dem Spielbrett gibt es insgesamt 40 *Felder*, davon sind 22 *Straßen* und 18 *Plätze*. Modellieren Sie Wertebereiche für *Straßen*, *Plätze* und *Felder*.

Straßen = ______________________________

Plätze = ______________________________

Felder = ______________________________

(b) Auf Straßen dürfen beliebig viele *Häuser* und *Hotels* gebaut werden, wobei die Anordnung ohne Bedeutung ist. Geben sie einen Wertebereich für den Bebauungszustand einer einzelnen Straße an.

Bebauungszustände = ______________________________

Welches Element dieses Wertebereichs beschreibt, dass 3 Häuser und 4 Hotels gebaut wurden?

______________________________ $\in$ Bebauungszustände

(c) Ein Spieler besitzt zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Geldbetrag und eine Menge von Straßen. Außerdem steht er immer auf genau einem der Felder. Modellieren Sie den Zustand eines Spielers, indem Sie einen entsprechenden Wertebereich angeben.

Spielerzustände = ______________________________

Welches Element dieses Wertebereichs beschreibt, dass ein Spieler 1000 DM, sowie die Straßen 4, 6 und 7 besitzt und auf Platz 17 steht?

______________________________ $\in$ Spielerzustände

(d) Wenn ein Spieler eine Straße betritt, die ihm nicht gehört, muss er Miete dafür bezahlen. Wie hoch diese Miete ist, hängt von der jeweiligen Straße und deren Bebauungszustand ab. Geben Sie den Wertebereich von Funktionen an, die diesen Zusammenhang beschreiben.

____

Aufgabe 3: „Terme und Algebren“ (10 Punkte)

Die folgende abstrakte Algebra *Binärbaum* = (τ, Σ, Q) ist bereits aus den Übungen bekannt:

Signatur: Σ = (S, F)

$$
\begin{array}{llll}
S = \{ & \text{BinTree, Element, BOOL} \ \} & & \\
F = \{ & \text{create:} & \rightarrow \text{BinTree}, & (F_1) \\
& \text{node: } \text{BinTree} \times \text{Element} \times \text{BinTree} & \rightarrow \text{BinTree}, & (F_2) \\
& \text{left: } \text{BinTree} & \rightarrow \text{BinTree}, & (F_3) \\
& \text{right: } \text{BinTree} & \rightarrow \text{BinTree}, & (F_4) \\
& \text{value: } \text{BinTree} & \rightarrow \text{Element}, & (F_5) \\
& \text{empty: } \text{BinTree} & \rightarrow \text{BOOL} \quad \} & (F_6)
\end{array}
$$

Axiome:
Seien l, r Terme der Sorte BinTree und v ein Term der Sorte Element:

$$
\begin{array}{llll}
Q = \{ & \text{empty(create)} & \equiv \text{true}, & (Q_1) \\
& \text{empty(node(l,v,r))} & \equiv \text{false}, & (Q_2) \\
& \text{left(node(l,v,r))} & \equiv \text{l}, & (Q_3) \\
& \text{right(node(l,v,r))} & \equiv \text{r}, & (Q_4) \\
& \text{value(node(l,v,r))} & \equiv \text{v} \quad \} & (Q_5)
\end{array}
$$

Beschreibung:

Die Sorte *BinTree* stellt einen Binärbaum dar, die Sorte *Element* beschreibt den Inhalt eines Knotens. *BOOL* soll dem Wertebereich { *true*, *false* } zugeordnet werden.

Die Konstante *create* steht für den leeren Baum. Die Operation *node* erzeugt einen neuen Wurzelknoten und verbindet einen linken und einen rechten Teilbaum zu einem neuen Binärbaum.

Die Operationen *left* bzw. *right* liefern den linken bzw. rechten Teilbaum eines Baumes.

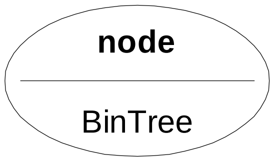
Die Operation *value* liefert den Inhalt des Wurzelknotens eines Baumes und die Operation *empty* zeigt an, ob der Baum leer ist oder nicht.

<u>*Hinweis*</u>: Im Folgenden seien a,b Konstante der Sorte Element.

(a) Es sei folgender Term gegeben:

node(node(create,value(right(node(create,b,create))),create),a,create)

1. Stellen Sie den Term als Kantorowitsch−Baum dar. Notieren Sie in jedem Knoten den Namen der Operation und die entsprechende Ergebnissorte:



2. Stellen Sie den Term in Postfixform dar.

(b) Erweitern Sie die oben angegebene abstrakte Algebra um die Operation „doubleTree“. Diese Operation soll zu einem gegebenen Binärbaum einen Binärbaum gleicher Struktur liefern. Die Elemente in den Knoten enthalten jedoch den jeweils doppelten Wert des ursprünglichen Knotens.

Nehmen Sie an, dass die Operation „double“ bereits gegeben ist. Sie liefert den doppelten Wert eines gegebenen Wertes der Sorte Element.

F’ = F ∪ { double: Element → Element,   **}**
Q’ = Q ∪ {   **}**

Hinweis: Geben Sie keine Axiome für die Operation „double“ an.

(c) Es sei folgender Term gegeben:

```
right(
    node(
        create,
        value(node(create, a, create)),
        left(node(create, b, create))
    )
)
```

Formen Sie den Term in Normalform um. Geben Sie in jedem Umformungsschritt das benutzte Axiom Q_x an.

Aufgabe 4: „Logik“ (10 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob die nachfolgenden Formeln erfüllbar und/oder tautologisch sind. Tragen Sie die Antworten (ja/nein) in die Tabelle ein.

	erfüllbar	***tautologisch***
$(p \rightarrow q)$		
$p \rightarrow (q \rightarrow p)$		
$(L \rightarrow p) \rightarrow 0$		

Benutzen Sie folgenden Freiraum für Ihre Wahrheitstafeln:

Hinweis: Lösungen ohne zugehörige Wahrheitstafel werden *nicht* gewertet.

(b) Zeigen Sie durch Gesetze der booleschen Algebra, dass die folgende Formel widersprüchlich ist:

$$(p \rightarrow q) \;\wedge\; \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$$

(c) Gegeben Sei die folgende Schlussfolgerung:

Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch.
Also folgt, dass Sokrates sterblich ist.

Formalisieren Sie diese Schlussfolgerung mit Hilfe von prädikatenlogischen Formeln mit den Prädikaten

M(x) für „x ist ein Mensch“
S(x) für „x ist sterblich“

und der Individuenkonstanten s für Sokrates.

(d) Gegeben seien die Formel F

$$\forall x \exists y\ (\ R(x, y) \rightarrow R(y, x)\ )$$

und eine passende Interpretation $\mathfrak{I}$

U = { 1, 3, 5, 7 }
$\mathfrak{I}$(R) = { (1,3), (1,5), (3,5), (5,1), (5,3), (5,7), (7,1), (7,3) }

Bestimmen Sie den Wahrheitswert $\mathfrak{I}$(F) der Formel unter dieser Interpretation.

Benutzen Sie dafür die nachfolgende Tabelle (so viele Zeilen wie Sie brauchen) und erklären Sie, wie Sie aus der Tabelle auf den Wahrheitswert schließen.

x	y	$\mathfrak{I}_{[...]}(R(x,y))$	$\mathfrak{I}_{[...]}(R(y,x))$	$\mathfrak{I}_{[...]}(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

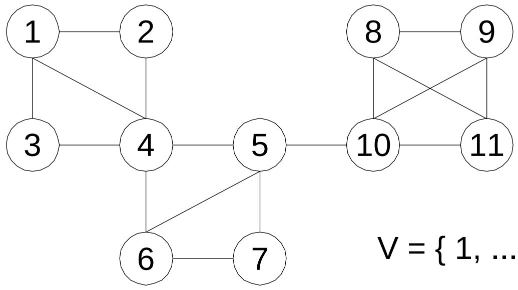
Wahrheitswert $\mathfrak{I}$(F) der Formel:

Begründung:

Klausur Modellierung, 22.02.2001 MatrikelNr.:

Aufgabe 5: „Graphen“ (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie den folgenden ungerichteten Graphen G = (V, E):



V = { 1, ..., 11 }

1. Stellen Sie den Graphen durch Adjazenzlisten dar.

   1: ____________________ 2: ____________________

   3: ____________________ 4: ____________________

   5: ____________________ 6: ____________________

   7: ____________________ 8: ____________________

   9: ____________________ 10: ____________________

   11: ____________________

2. Beschriften Sie die Knoten mit ihrem Grad und geben Sie den Grad des Graphen an.

   Grad(G) = _______________

3. Gibt es einen Euler−Kreis? Begründen Sie?

   ____

   ____

   ____

4. Geben Sie die Menge S aller Schnittknoten an.

   S = { }

5. Zeichnen Sie den durch V \ S induzierten Graphen G’ und kreisen Sie die Zusammenhangskomponenten ein.

(b) Geben Sie zu folgendem Programm einen Ablaufgraphen an:

Grund–blöcke	**Programm**

1	`b = 1;`
	`a = read();`
	`if ( a > 0 )`

2	`{` `   while ( b < 10 )`

3	`   {`
	`      b = b + a;`
	`   }`

4	`   a = 0;` `}`
5	`return b;`

Klausur Modellierung, 22.02.2001	MatrikelNr.:

Aufgabe 6: „Kontextfreie Grammatiken“ (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes Beispiel einer Tabellendefinition:

```
\BeginTabular
    rot  & blau \\
    blau & gelb & rot \\
\EndTabular
```

(a) Vervollständigen Sie die Definition der kontextfreien Grammatik G = (N, T, P, Table) um die Produktionsmenge P, so dass diese Grammatik Tabellendefinitionen wie im obigen Beispiel erzeugt.

Beachten Sie folgende Randbedingungen:

- Das Schachteln von Tabellen ist nicht erlaubt.
- Eine Tabelle besteht aus mindestens einer Zeile. Jede Zeile wird durch das Terminal '\\' abgeschlossen.
- Eine Tabellenzeile enthält mindestens eine Zelle. Mehrere Zellen werden durch das Terminal '&' getrennt.
- Jede Zelle enthält Text. Hier z.B. „rot“, „blau“ oder „gelb“.

S = Table
N = { Table, Rows, Row, Cells, Cell }
T = { '`\BeginTabular`'**,** '`\EndTabular`'**, Text,** '&'**,** '`\\`' **}**
P = {   **}**

Gegeben sei das Beispiel einer Tabellendefinition von der vorherigen Seite:

```
\BeginTabular
    rot  & blau \\
    blau & gelb & rot \\
\EndTabular
```

(b) Geben Sie zu dem Beispiel einen Ableitungsbaum an.