Klausur: Modellierung

Prof. Dr. U. Kastens, Universität Paderborn

Wintersemester 2001/2002

10.04.2002, 9:00 − 11:00 Uhr

Nachname: ____________________ **Vorname:** __________________

Matrikelnummer: ____

Bitte genau durchlesen!

- Schreiben Sie zu Beginn der Klausur auf die **erste Seite** in **Blockschrift** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Ohne diese Angaben wird die Klausur **nicht** gewertet.
- Verwenden Sie **keinen Rotstift** und **keinen Bleistift**.
- Lassen Sie die Klausur **zusammengeheftet**.
- Verwenden Sie **kein eigenes Papier**. Sie können **die letzten drei Seiten** der Klausur **abreißen** und als Konzeptpapier verwenden. Weiteres Papier erhalten Sie von der Klausuraufsicht.
- Schreiben Sie Ihre **Lösungen** in die dafür **vorgesehenen Freiräume**.
- Benutzen Sie die **Rückseiten** des Klausurpapiers falls Sie **nicht ausreichend Platz** für Ihre Lösung haben sollten.
- Streichen Sie ungültige Lösungen durch und kennzeichnen Sie Ihre Lösung eindeutig. Die Aufgabe gilt als **nicht gelöst**, wenn Sie **mehr als eine Lösung** angeben.
- Als einziges Hilfsmittel ist **ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN−A4−Blatt** erlaubt. Schreiben Sie auf dieses Blatt ebenfalls Ihren Namen.
- Die Klausur ist mit Sicherheit **bestanden**, wenn **mindestens die Hälfte** der Punkte erreicht wird.

Viel Erfolg!

Aufgaben	**Max. Pkt.**	**Punkte**
1. Verständnisfragen	10	
2. Terme und Algebren	10	
3. Logik	10	
4. Graphen	10	
5. Kontextfreie Grammatiken	10	
6. Modellbahn−Schienennetz	10	
Summe:	**60**	

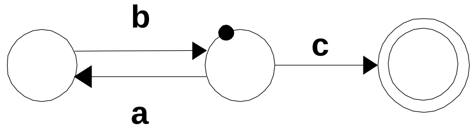
Note	**Bonus**	**Endnote**

Aufgabe 1: „Verständnisfragen“ (10 Punkte)

(a) Geben Sie die logische Konjunktion $\wedge$ als Relation in Mengenschreibweise an.

(b) Formulieren Sie im ER−Modell: „Sportler und Wettkämpfe der Winterspiele werden jeweils durch Nummerierung identifiziert. Jeder Sportler ist für mindestens einen und höchstens 5 Wettkämpfe angemeldet.“

(c) Geben Sie die Sprache des folgenden Automaten als *regulären Ausdruck* an.



(d) Wieviele Knoten und wieviele Blätter hat ein vollständiger Binärbaum der Höhe *n* ?

(e) Formen Sie folgenden Term der abstrakten Keller−Algebra in die Normal−form um.

push(pop(push(push(createStack,1),2)),3)

(f) Vervollständigen Sie die Schleifenregel.

$$\frac{\{\quad\quad\quad\}\ S\ \{\quad\quad\quad\}}{\{\ P\ \}\ \text{solange } B \text{ wiederhole } S\ \{\quad\quad\quad\}}$$

Aufgabe 2: „Terme und Algebren“ (10 Punkte)

(a) Es seien folgende zwei Terme in Funktionsnotation gegeben:

f(g(x, g(y, h(y)))) und **f(g(h(y), g(a, x)))**

Es seien x, y Variable und a eine Konstante.

Unifizieren Sie die Terme mit Hilfe des Verfahrens von Robinson.

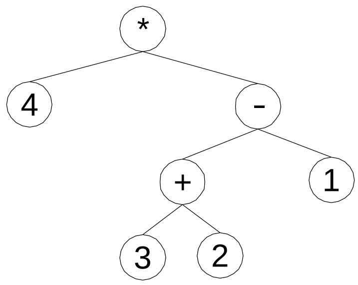
Benutzen Sie so viele Schritte, wie Sie für die Lösung benötigen und kennzeichnen Sie die Abweichungspaare durch Unterstreichen.

#	***Terme***	***Substitutionen***
1.		$\sigma_1 = [\ ]$
2.	s = **f(g(x, g(y, h(y))))** t = **f(g(h(y), g(a, x)))**	$\sigma_2 = \sigma_1 [\quad]$
3.	s = t =	$\sigma_3 = \sigma_2 [\quad]$
4.	s = t =	$\sigma_4 = \sigma_3 [\quad]$
5.	s = t =	$\sigma_5 = \sigma_4 [\quad]$
6.	s = t =	$\sigma_6 = \sigma_5 [\quad]$

Fassen Sie die einzelnen Substitutionen zu einer mehrfachen Substitution, einem allgemeinsten Unifikator, zusammen und geben Sie diesen an:

Unifikator: ____

(b) Es sei folgender Term in Baumdarstellung gegeben. Geben Sie die Präfixform des Terms an.



Präfixform: ____

(c) Es sei folgende Signatur Σ = (S, F) gegeben:

$$\begin{array}{lll} S = \{ & A, B \ \} & \\ F = \{ & f: A \times B & \rightarrow A, \\ & g: & \rightarrow A, \\ & h: & \rightarrow B, \\ & i: & \rightarrow B \ \ \} \end{array}$$

Geben Sie *alle* korrekten Terme der Sorte A bis zu einer Schachtelungstiefe von 2 an.

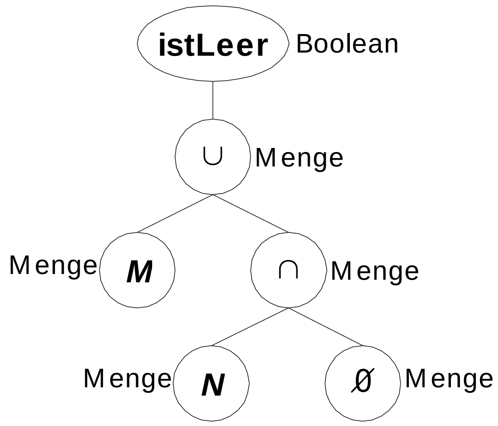
Schachtelungstiefe	***korrekte Terme der Sorte A***
0	
1	
2	

Hinweis: Ein Term, der nur aus einer Konstanten besteht, hat die Schachtelungstiefe 0.

(d) Es sei folgender Term in Infixnotation gegeben:

istLeer(M ∪ N ∩ ∅)

Die Baumdarstellung des Terms ist im Folgenden zu sehen. In den Knoten ist jeweils der Name der Operation und daneben dessen Ergebnissorte notiert.



1. Welche der beiden Operatoren ∩ und ∪ hat *höhere Präzedenz*? Bitte ankreuzen:

❑ Operator ∩ / ❑ Operator ∪

2. Vervollständigen Sie folgende zugehörige Signatur Σ = (S, F).

S = { Menge, Boolean }
F = { ∪:
∩:
istLeer:
∅:
M:
N: }

Aufgabe 3: „Logik“ (10 Punkte)

(a) **Aussagenlogik:**

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, ob die nachfolgenden Formeln erfüllbar und/oder tautologisch sind. Tragen Sie die Antworten (ja/nein) in die Tabelle ein.

	erfüllbar	***tautologisch***
$(L \rightarrow q) \vee q$		
$(O \rightarrow p) \rightarrow L$		

Hinweis: Lösungen ohne zugehörige Wahrheitstafel werden *nicht* gewertet.

Benutzen Sie folgenden Freiraum für die beiden Wahrheitstafeln:

(b) **Prädikatenlogik:**

Was ist die logische Negation der Aussage:

„**Alle Mitarbeiter sind höchstens 60 Jahre alt.**“

Negation (in Worten):

____

____

____

(c) **Prädikatenlogik:**

Gegeben seien die Formel F = $\exists$**x**$\forall$**y P(x, y)**

und eine passende Interpretation $\Im$

U = { 1, 3 }
$\Im$**(P) = { (3,1), (3,3) }**

Bestimmen Sie den Wahrheitswert $\Im$(F) der Formel unter dieser Interpretation.

Benutzen Sie dafür die nachfolgende Tabelle (so viele Zeilen wie Sie brauchen) und erklären Sie, wie Sie aus der Tabelle auf den Wahrheitswert schließen.

x	**y**	$\Im_{[...]}$**(P(x,y))**

Wahrheitswert $\Im$(F) der Formel:

Begründung:

(d) **Verifikation:**

Gegeben sind die Vor− und Nachbedingung folgender zweiseitigen Alternative. Geben Sie alle Aussagen und Zwischenschritte nach den Hoare'schen Schlussregeln an:

{x > 0}

falls b > 0:

x := b;

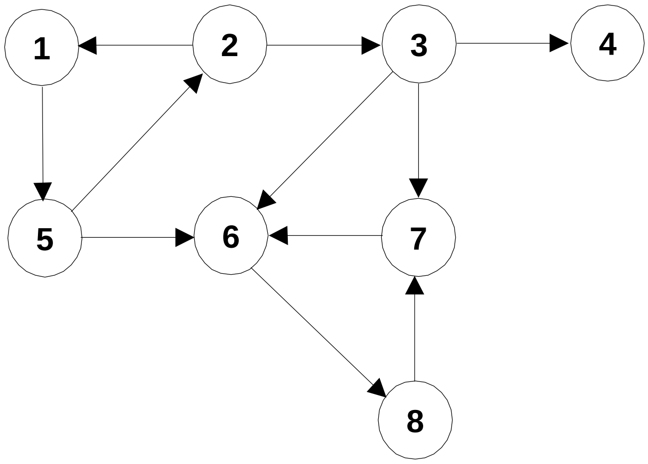
sonst

x := − (b − 1);

{x > 0}

Aufgabe 4: „Graphen“ (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie den folgenden in graphischer Darstellung gegebenen Graphen:

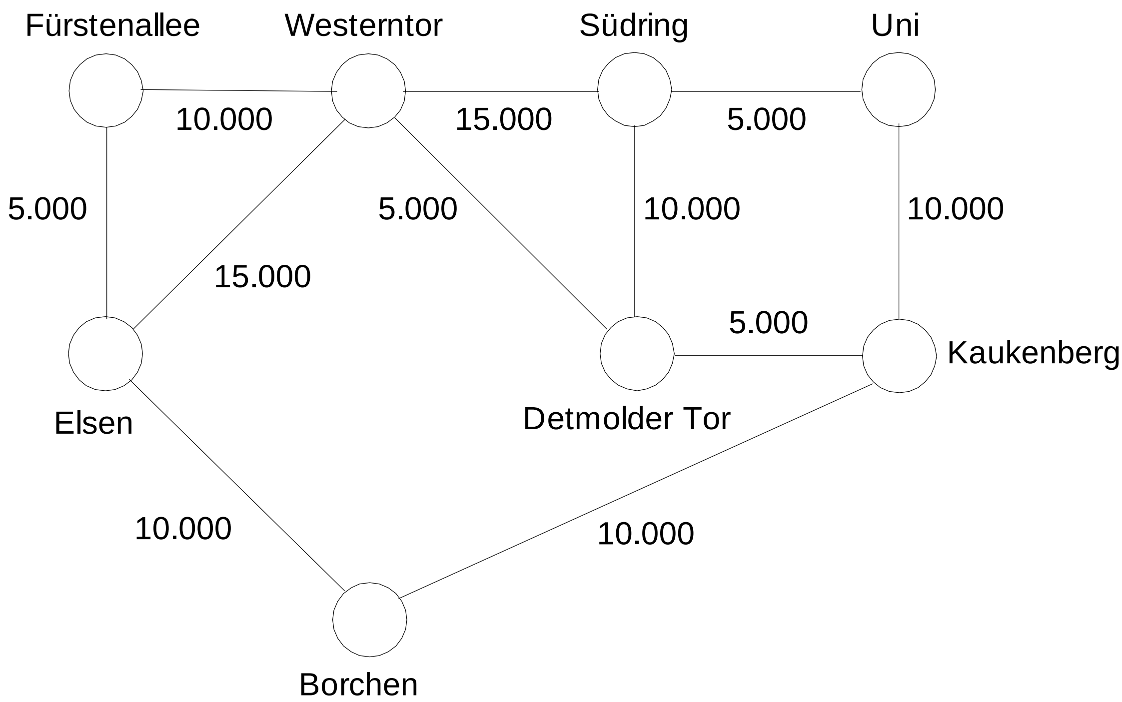


1. Stellen Sie den Graphen als Adjazenzlisten dar.

2. Geben Sie die Zusammenhangskomponenten als Knotenmengen an.

3. Welchen Grad hat der Graph?

(b) Eine Stadt muß aufgrund eines finanziellen Engpasses die Kosten zur Wartung des Straßensystems so weit wie möglich reduzieren. Allerdings soll jeder Ort weiterhin von jedem anderen Ort über gewartete Straßen erreichbar sein. Das Straßennetz der Stadt sieht wie folgt aus (Kosten in Euro an den Kanten):



1. Was für ein Typ Graphproblem liegt hier vor?

2. Wie hoch sind die minimalen Kosten? Zeichnen Sie in den obigen Graphen eine entsprechende Lösung ein.

Aufgabe 5: „Kontextfreie Grammatiken“ (10 Punkte)

(a) Mit Hilfe einer einfachen Ausdrucksgrammatik wird eine Notation für die Summe von Zahlen beschrieben.

Ein Wort der Sprache ist z.B. „**3+a+b+1**“.

Die folgende kontextfreie Grammatik G = (N, T, P, S) beschreibt die Notation solcher Ausdrücke.

S = Summe

N = { Summe, Operand }

T = { ’+’, Zahl, Variable }

P = { **p_1: Summe ::= Summe ’+’ Summe,**
p_2: Summe ::= Operand,
p_3: Operand ::= Zahl,
p_4: Operand ::= Variable }

Zeigen Sie, dass die Grammatik mehrdeutig ist.

(b) Betrachten Sie die Notation von Termen in Funktionsform. Es werden Operationen wie folgt notiert:

Operator vor der geklammerten Folge seiner Operanden
f (t_1, t_2, ..., t_n)

Im Folgenden sind vier Beispielterme in Funktionsform zu sehen:

```
c
add(a,b)
add(a,sub(b,c))
root(sub(a,b))
```

Vervollständigen Sie die Definition der kontextfreien Grammatik G = (N, T, P, S) um die Nichtterminalsymbolmenge N und die Produktionsmenge P, so dass diese Grammatik die Notation von Termen in Funktionsform beschreibt.

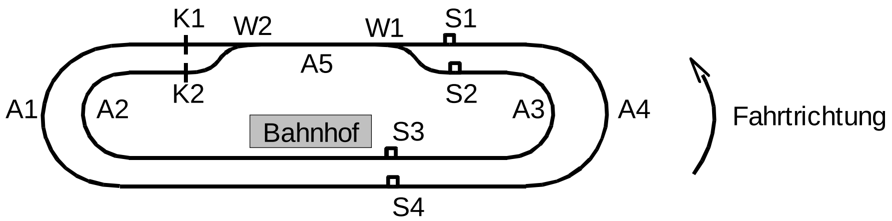
Beachten Sie folgende Randbedingungen:

- Operationen können geschachtelt werden.
- Ein Term besteht mindestens aus einer Konstanten (0−stellige Operation).

S = Term
T = { Operation, ’(’, ’)’, ’,’ }
N = { Term, }
P = { }

Aufgabe 6: „Modellbahn−Schienennetz“ (10 Punkte)

Es sei folgendes Schienennetz einer Modelleisenbahn gegeben:



S1 bis S4 sind Signale, W1 und W2 sind Weichen, K1 und K2 sind Kontroll−punkte. Signale haben entweder den Zustand *fahren* oder *halten*. Weichen haben entweder den Zustand *geradeaus* oder *Kurve*.

(a) Geben Sie einen Wertebereich für die Zustände der Strecke an.

Signale	= {S1, S2, S3, S4}
Weichen	= {W1, W2}
Signalstellungen	= { fahren, halten }
Weichenstellungen	= { geradeaus, Kurve }

Streckenzustände = ______________________________

____

(b) Wenn die Weiche W1 auf *geradeaus* steht, muss das Signal S2 auf *halten* stehen. Wenn die Weiche W1 auf *Kurve* steht, muss das Signal S1 auf *halten* stehen. Anderenfalls könnte ein Zug die Weiche beschädigen. Modellieren Sie dies durch *eine* aussagenlogische Formel.

W1g bedeute, dass die Weiche W1 auf *geradeaus* steht.
S1f bedeute, dass das Signal S1 auf *fahren* steht.
S2f bedeute, dass das Signal S2 auf *fahren* steht.

____

(c) Die Strecke ist in die Abschnitte A1 bis A5 unterteit: An jedem Kontroll- punkt oder Signal fängt ein neuer Abschnitt an. Ein Zug startet am Signal S3 und fährt in die angegebene Fahrtrichtung.

Modellieren Sie die Folge der Abschnitte, die der Zug durchfahren kann, durch einen endlichen Automaten. Die Zustände des Automaten müssen nicht beschriftet werden.

(d) 1. Modellieren Sie Teil (c) durch ein Petrinetz. Vergessen Sie nicht, eine Anfangsmarkierung anzugeben!

2. Fügen Sie ihrer Lösung Kanten zum vorgegebenen Teilnetz hinzu, um die Stellung der Weiche W2 zu berücksichtigen.

Weichenstellung W2: