Klausur: Modellierung

Prof. Dr. U. Kastens, Universität Paderborn
Wintersemester 2000/2001
05.09.2001, 09:00 − 11:00 Uhr

Name: ____

Matrikelnummer: ____________________________________

Bitte genau durchlesen!

- Schreiben Sie zu Beginn der Klausur auf die **erste Seite** in **Blockschrift** Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer**. Ohne diese Angaben wird die Klausur **nicht** gewertet.
- Verwenden Sie **keinen Rotstift** und **keinen Bleistift**.
- Lassen Sie die Klausur **zusammengeheftet**.
- Verwenden Sie **kein eigenes Papier**. Sie können **die letzten drei Seiten** der Klausur **abreißen** und als Konzeptpapier verwenden. Weiteres Papier erhalten Sie von der Klausuraufsicht.
- Schreiben Sie Ihre **Lösungen** in die dafür **vorgesehenen Freiräume**.
- Benutzen Sie die nicht bedruckten **Rückseiten** des Klausurpapiers falls Sie **nicht ausreichend Platz** für Ihre Lösung haben sollten.
- Streichen Sie falsche Lösungen durch und kennzeichnen Sie Ihre Lösung eindeutig. Die Aufgabe gilt als **nicht gelöst**, wenn Sie **mehr als eine Lösung** angeben.
- Als einziges Hilfsmittel ist **ein beidseitig selbst handbeschriebenes DIN−A4−Blatt** erlaubt. Schreiben Sie auf dieses Blatt ebenfalls Ihren Namen.
- Die Klausur ist mit Sicherheit **bestanden**, wenn **mindestens die Hälfte** der Punkte erreicht wird.

Viel Erfolg!

Aufgaben	**Max. Pkt.**	**Punkte**
1. Verständnisfragen	10	
2. Wertebereiche	10	
3. Terme und Algebren	10	
4. Logik	10	
5. Graphen	10	
6. Endl. Autom. u. Petri−Netze	10	
Summe:	**60**	

Note	**Bonus**	**Endnote**

Aufgabe 1: „Verständnisfragen“ (10 Punkte)

(a) Die Menge M habe die Kardinalität |M| = m. Welche Kardinalität hat dann folgende Potenzmenge

|Pow(M x M)| = ______________________________

(b) Wandeln Sie folgenden Term aus der Postfix−Form **a b + c *** in die Präfix−Form um:

____

(c) Geben Sie zu jeder der beiden folgenden kontextfreien Grammatiken jeweils zwei unterschiedliche Sätze an.

```
X ::= Y                 X ::= Y
Y ::= '(' Y ')'         Y ::= '(' Z ')'
Y ::= Z                 Z ::= '[' Y ']'
Z ::= '[' Z ']'         Z ::=
Z ::=
```

2 Sätze:

____________________ ____________________

____________________ ____________________

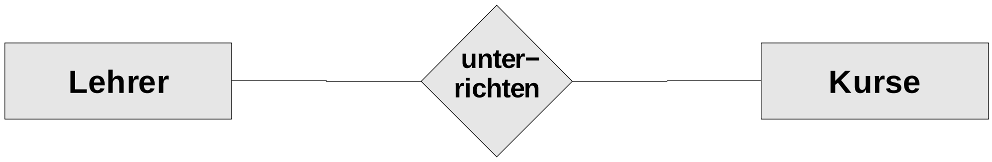
(d) Zeichnen Sie einen Graphen, der die Relation **{ (1,2), (2,3), (3,3) }** darstellt.

(e) Ergänzen Sie das angegebene ER−Modell um folgende Angaben:

(1) Lehrer unterrichten mindestens jeweils 5 Kurse.

(2) Jeder Kurs kann von 2 bis 3 Lehrern unterrichtet werden.

(3) Kurse werden in die disjunkten Entitätsmengen Grundkurse und Hauptkurse eingeteilt.



(f) Sei INV eine Invariante der folgenden Schleife:

$\uparrow_1$ S1; $\uparrow_2$ solange B wiederhole { $\uparrow_3$ S2; $\uparrow_4$ S3; $\uparrow_5$ } $\uparrow_6$ S4; $\uparrow_7$

Wo braucht INV **nicht** zu gelten? ________________________________

(g) Was ist die logische Negation der Aussage:

„**Alle Teilnehmer haben mindestens 30 Punkte erreicht.**“

Negation (in Worten):

____

____

____

Aufgabe 2: „Wertebereiche“ (10 Punkte)

(a) Es sei M := {x, y}. Schreiben Sie die folgenden Mengen in extensionaler Form durch Angabe aller Elemente. (Hinweis: Pow bezeichnet die Potenzmenge.)

$M \times Pow(\{a\}) = \{$ ______________________________ $\}$

$\{M\} \times Pow(\{a\}) = \{$ ______________________________ $\}$

(b) Wir benutzen folgende grundlegende Wertemengen zur Modellierung:

Personen = { Anton, Berta, Charlie }
Telefonnummern = $\{ 0,1,2, ..., 9 \}^4$

Das folgende Beispiel stellt ein kleines Telefonbuch dar:

```
Anton..........5213
Berta..........8472 oder 2771
Charlie........1101
```

Den Wertebereich solcher Telefonbücher kann man auf verschiedene Arten modellieren:

Telefonbücher1 = Personen $\rightarrow$ Pow(Telefonnummern)
Telefonbücher2 = Telefonnummern $\rightarrow$ Personen

(1) Geben Sie die zum oben abgebildeten Beispiel passenden Elemente beider Wertebereiche an:

______________________________ $\in$ **Telefonbücher1**

______________________________ $\in$ **Telefonbücher2**

(2) Lassen sich einer Telefonnummer mehrere Personen zuordnen?
Bitte ankreuzen:

	Telefonbücher1	**Telefonbücher2**
Ja		
Nein		

(3) Zur Speicherung im Computer werden die Daten **in einer bestimmten Reihenfolge** angeordnet. Gespeichert werden z.B. folgende Daten:

((1101, Charlie), (2771, Berta), (5213, Anton), (8472, Berta))
$\in$ **Telefonbücher3**

Geben Sie einen passenden Wertebereich an:

Telefonbücher3 = ____

Aufgabe 4: „Logik“ (10 Punkte)

(a) **Aussagenlogik:**

Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die Gültigkeit der De Morgan−Regel:

$$\neg (X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$$

Geben Sie eine **ausführliche** Wahrheitstafel an und **begründen** Sie die Äquivalenz:

X	Y	

Begründung:

(b) **Aussagenlogik:**

Formen Sie die folgende Formel mit Hilfe der Gesetze der boolschen Algebra schrittweise um (Angabe der Gesetze ist nicht nötig):

$$\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p)$$

Welche Eigenschaften besitzt diese Formel? Bitte ankreuzen:

	allgemeingültig	erfüllbar	unerfüllbar
Ja			
Nein			

(c) **Prädikatenlogik:**
Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Formel:

$$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ (\forall \mathbf{x}\ \mathbf{P}\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \exists \mathbf{y}\ \mathbf{Q}\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}))$$

(1) Kennzeichnen Sie *freie* Variable durch unterstreichen, *gebundene* Variable durch eine Linienverbindung zur Variable des bindenden Quantors.

(2) Führen Sie eine *konsistente Umbenennung* durch, so dass alle Variablen verschiedene Namen haben.

(d) **Verifikation:**
Der folgende Algorithmus berechnet den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen:

{ a > 0, b > 0 }

```
x := a
y := b
solange x ≠ y wiederhole
    falls x > y
        x := x − y
    sonst
        y := y − x
```

<u>Ausgabe</u>: x = y = ggt(a,b)

Zeigen Sie, dass der Algorithmus terminiert.
Sie können die Invariante **INV = { x** > **0** $\wedge$ **y** > **0 }** als bewiesen voraus−setzen.

Aufgabe 3: „Terme und Algebren“ (10 Punkte)

(a) Es seien folgende zwei Terme in Funktionsnotation gegeben:

f(w, h(y, g(y))) und **f(g(y), h(g(x), w))**

Unifizieren Sie die Terme mit Hilfe des Verfahrens von Robinson.

Benutzen Sie so viele Schritte, wie Sie für die Lösung benötigen und kennzeichnen Sie die Abweichungspaare durch Unterstreichen.

#	***Terme***	***Substitutionen***
1.		σ_1 = [ ]
2.	s = **f(w, h(y, g(y)))** t = **f(g(y), h(g(x), w))**	$\sigma_2 = \sigma_1$ [ ]
3.	s = t =	$\sigma_3 = \sigma_2$ [ ]
4.	s = t =	$\sigma_4 = \sigma_3$ [ ]
5.	s = t =	$\sigma_5 = \sigma_4$ [ ]
6.	s = t =	$\sigma_6 = \sigma_5$ [ ]

Fassen Sie die einzelnen Substitutionen zu einem allgemeinsten Unifikator zusammen und geben Sie diesen an:

Unifikator: ____

(b) Gegeben sei folgende abstrakte Algebra *Nat* = (τ, Σ, Q) der natürlichen Zahlen:

Signatur: Σ = (S, F)

S = {	N }				
F = {	null:		$\rightarrow$	N,	(F_1)
	succ:	N	$\rightarrow$	N,	(F_2)
	add:	N $\times$ N	$\rightarrow$	N }	(F_3)

Axiome: Seien n, m Terme der Sorte N:

Q = {	add(n, null)	$\equiv$	n,	(Q_1)
	add(n, succ(m))	$\equiv$	add(succ(n), m) }	(Q_2)

Beschreibung:

Die Sorte N stellt die natürlichen Zahlen größer gleich Null dar.

Die Konstante *null* steht für die Zahl „0“.

Eine Zahl n wird durch n−maliges Anwenden von *succ* dargestellt: *succ(succ(null))* steht für 2.

Die Operation *add* addiert zwei natürliche Zahlen.

Aufgaben:

(1) Formen Sie den folgenden Term in Normalform um. Geben Sie bei jedem Schritt das benutzte Axiom Q_x an.

add(succ(succ(null)), add(succ(null), null))

(2) Klassifizieren Sie die Operationen der abstrakten Algebra:

Operation	***Klassifikation***
null	
succ	
add	

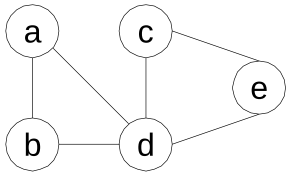
(3) Erweitern Sie die abstrakte Algebra um die Operation *lessthan*.

Diese Operation vergleicht zwei natürliche Zahlen x und y und ergibt *true*, wenn x < y ist, sonst ergibt die Operation *false*.

S' = S ∪ {   **}**
F' = F ∪ {   **}**
Q' = Q ∪ {   **}**

Aufgabe 5: „Graphen“ (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie den folgenden Graphen G:



(1) Geben Sie den Grad des Graphen an: ______________________

(2) Repräsentieren Sie den Graphen durch Adjazenzlisten:

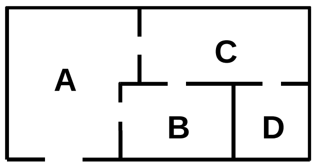
(3) Gibt es einen Hamilton−Kreis? Wenn ja, geben Sie ihn an:

____

(4) Zeichnen Sie einen Spannbaum zu G.

(5) Zeichnen Sie Pfeile an alle Kanten des Graphen oben auf der Seite, so dass der entstehende gerichtete Graph stark zusammenhängend ist.

(b) Es sei der folgende Grundriss eines Hauses gegeben:



(1) Modellieren Sie die Verbindungen der Räume durch einen Graphen. Beachten Sie auch die Eingangstür.

(2) Geben Sie zu folgenden Fragen die entsprechenden graphtheo−retischen Fragen an:

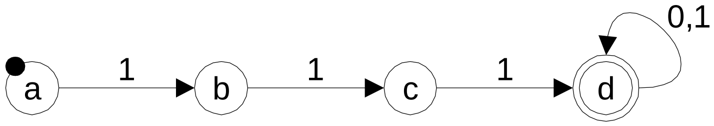
Frage	***Entsprechende graphtheoretische Frage***
Durch wie viele Türen muss man mindestens gehen, um von Raum X nach Raum Y zu kommen?	
Gibt es einen Weg, bei dem man jede Tür genau einmal benutzt?	
Kommt man noch überall hin, wenn eine Tür ver− schlossen ist?	

Aufgabe 6: „Endl. Automaten/Petri−Netze“ (10 Punkte)

(a) Endliche Automaten:

Gegeben sei ein endlicher Automat A über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$:

A:



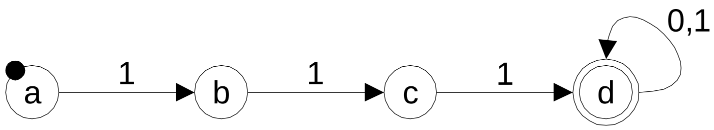
(1) Geben Sie die durch A akzeptierte Sprache $\mathrm{L}(\mathrm{A})$ formal in Mengen−schreibweise an.

$\mathrm{L}(\mathrm{A})$ =

(2) Erweitern Sie den Automaten A zu B so, dass B deterministisch alle Zeichenketten über Σ akzeptiert, die ein Teilwort *111*, also drei aufeinanderfolgende Buchstaben *1* enthalten.
Beispiele: *01010**111**0010*, *0001000**111**10101011*.

Hinweis: keine formale Angabe, die Zeichnung reicht aus.

B:

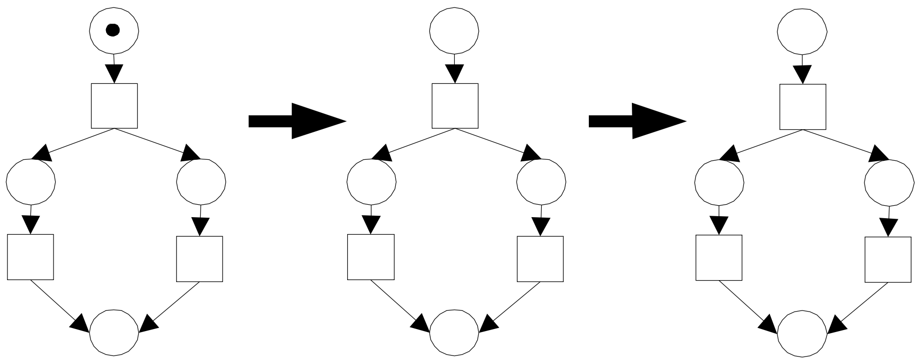


Geben Sie die durch B akzeptierte Sprache $\mathrm{L}(\mathrm{B})$ formal in Mengen−schreibweise an.

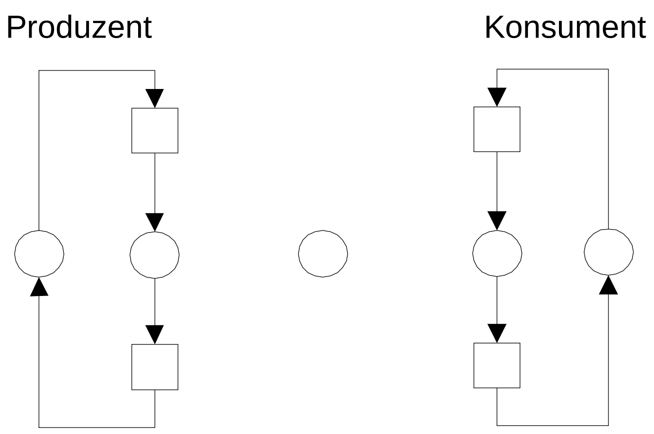
$\mathrm{L}(\mathrm{B})$ =

(b) Petrinetze:

(1) Geben Sie zwei aufeinander folgende Folgemarkierungen in folgendem Petri−Netz an:



(2) Sie sollen einen **beschränkten Puffer** mit folgenden Eigenschaften modellieren: die *Puffergröße ist auf 5 beschränkt* und der *Produzent liefert jeweils immer 2 Einheiten*. Ergänzen Sie dazu im folgenden Petri−Netz notwendige Kanten und Beschriftungen und geben Sie eine geeignete Markierung an.



(3) Geben Sie ein kleines Petri−Netz mit einer Markierung an, das folgende Eigenschaft hat: *Auf einer seiner Stellen kann die Anzahl der Marken beliebig groß werden.*