

## 4.2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen, Variablen, Junktoren**.  
Zusätzliche Konzepte:

- $A = (\mathcal{T}, \Sigma)$  ist die so genannte **Termalgebra** (mit Variablen, ohne Axiome) mit Signatur  $\Sigma = (\{T\}, F)$ , wobei  $T$  die Sorte „Term“ ist und alle Operationen  $f \in F$  von der Form  $f: T^n \rightarrow T$  sind. **Terme** sind die korrekten Terme bzgl. dieser Termalgebra.
- **n-stellige Prädikate** sind Operationen  $P: T^n \rightarrow \text{BOOL}$ . In einer Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen,  
z. B. „x ist eine Katze“ bzw. als Formel:  $\text{istKatze}(x)$   
 $\text{teilt}(a,b)$ ,  $\text{größterGemeinsamerTeiler}(a, b, g)$
- **Quantoren** „für alle x gilt  $\alpha$ “ und „es gibt ein x, so dass  $\alpha$  gilt“  
in Symbolen:  $\forall x\alpha$  bzw.  $\exists x\alpha$   
Beispiel:  $\forall x (\text{esIstNacht} \wedge \text{istKatze}(x) \rightarrow \text{istGrau}(x))$ ;  
in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau.“

Schon **zur Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte **der Prädikatenlogik**,

z. B. **größter gemeinsamer Teiler**:

gegeben:  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ;  
gesucht: größter gemeinsamer Teiler  $g$  von  $a$  und  $b$ , d. h.  
 $\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow h \leq g))$

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 421

#### Ziele:

Motivation der Prädikatenlogik

#### in der Vorlesung:

- Parametrisierung von Aussagen verdeutlichen
- Prädikate und Relationen
- Quantoren intuitiv
- Einsatz in der Modellierung

#### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

#### Verständnisfragen:

Warum kann man einfache Aufgaben für algorithmische Berechnungen nicht mit Aussagenlogik modellieren?

## Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik  
Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, widerspruchsvoll**:  
wie in der Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in der Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 422

**Ziele:**

Übersicht

**in der Vorlesung:**

Vergleich mit Aussagenlogik

## Prädikatenlogische Formeln

**Prädikatenlogische Formeln** (PL-Formeln) werden induktiv wie folgt definiert:

- Primformeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form  $P(t_1, \dots, t_n)$  oder Gleichungen in der Form  $t_1 = t_2$ .  
Dabei ist  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikatsymbol und die  $t_i$  sind Terme der Termalgebra.  
**0-stellige Prädikatsymbole** entsprechen den atomaren **Aussagen der Aussagenlogik**.
- logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:  
 $\neg\alpha$     $\alpha \wedge \beta$     $\alpha \vee \beta$   
**sowie**  $\alpha \rightarrow \beta$     $\alpha \leftrightarrow \beta$  **als Abkürzungen**  
mit prädikatenlogischen Formeln  $\alpha$  und  $\beta$
- der **Allquantor**  $\forall$  und der **Existenzquantor**  $\exists$  bilden prädikatenlogische Formeln:  
 $\forall x \alpha$  und  $\exists x \alpha$   
mit der prädikatenlogischen Formel  $\alpha$ ; sie definieren die Variable  $x$

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

**Quantoren** haben die gleiche **Präzedenz** wie  $\neg$ , also höhere als  $\wedge$ .

Beispiele:

$\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow \leq(h, g)))$  (siehe Folie 4.21)

$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z)$  „R ist eine Funktion“

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 423

### Ziele:

Notation und Struktur

### in der Vorlesung:

- Beispiele
- Struktur an Bäumen erläutern
- Signatur explizit machen

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

### Verständnisfragen:

- Zeigen Sie, dass die Formeln auf Folie Mod-4.21 syntaktisch korrekt sind.
- Zu welchen Signaturen gehören ihre Terme?

## Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur  $\Sigma$  wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe: Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**. Nur solche Variablen dürfen quantifiziert werden.

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 424

**Ziele:**

PL Formeln in der Praxis

**in der Vorlesung:**

- Anmerkungen erläutern
- PL erster Stufe abgrenzen

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Vorkommen von Variablen

Wir sagen: (Eine Variable mit Namen) **x** kommt in einer PL-Formel  $\alpha$  vor, wenn sie in einer Primformel und dort in einem Term vorkommt.

Für eine PL-Formel der Form  $\forall x \alpha$  oder  $\exists x \alpha$  ist  $\alpha$  der **Wirkungsbereich (für x) des Quantors**. x ist der **Name der Variablen des Quantors**.

**Beispiel:**

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge \forall z R(y, z))$$

Quantoren mit ihren Wirkungsbereichen

**Anmerkungen:**

- Eine Variable hat einen Namen; **mehrere Variable können den gleichen Namen haben**.
- Ein Quantor definiert eine Variable, z. B.  $\forall x \alpha$  definiert (eine Variable mit Namen) x. Ihr **Name kann im Wirkungsbereich (auch mehrfach) vorkommen**.
- **Wirkungsbereiche** von Quantoren können **geschachtelt** sein, sogar mit (verschiedenen) Variablen, die **dieselben Namen** haben.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 425

**Ziele:**

Bindung von Namen verstehen

**in der Vorlesung:**

- Wirkungsbereiche erläutern, und an Bäumen zeigen
- Variablendefinition und ihre Anwendungen
- Unterschied: Variable, ihr Name, dessen Vorkommen in einer Formel
- Vergleich mit Variablendeklarationen in Programmen

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

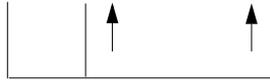
## Freie und gebundene Variable

(Ein Vorkommen von)  $x$  in einer Formel  $\alpha$  heißt **frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich für  $x$  eines Quantors liegt.

Ein **Quantor**  $\forall x \alpha$  bzw.  $\exists x \alpha$  **bindet** alle (Vorkommen von)  $x$ , die frei sind in  $\alpha$ . (Das Vorkommen von)  $x$  heißt dann **gebunden**.

Beispiel: Formel  $\alpha$

$$R(y) \wedge \exists y (P(y, x) \vee Q(y, z))$$



freie Vorkommen

gebundene Vorkommen

In  $\alpha$  gibt es 3 freie Variable; sie haben die Namen  $y$ ,  $x$ ,  $z$ .

2 Variable haben den Namen  $y$ ;  
eine kommt frei vor in  $R(y)$ , die andere kommt 2 mal gebunden in  $\alpha$  vor.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 426

### Ziele:

Freie Variable erkennen

### in der Vorlesung:

- Variable sind frei in Bezug auf eine (Teil-)Formel,
- weiter außen werden sie an eine Bedeutung gebunden.

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Umbenennung von Variablen

In einer Formel können mehrere Vorkommen von Quantoren **verschiedene Variable mit gleichem Namen** einführen und in ihrem Wirkungsbereich binden:

Beispiele:

$$\forall y (\exists x R(x, y) \wedge \exists x Q(x, y))$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \wedge \exists x R(x, y))$$

**Umbenennung:** In einer Formel kann man **alle (gebundenen) Vorkommen des Namens x der Variablen eines Quantors in dessen Wirkungsbereich durch einen neuen Namen z ersetzen**, der sonst nicht in der Formel vorkommt. Die Bedeutung der Formel, (genauer: semantische Aussagen über sie), ändert sich dadurch nicht.

Beispiele von oben:

$$\forall y (\exists x R(x, y) \wedge \exists z Q(z, y))$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \wedge \exists z R(z, y))$$

Damit kann man erreichen, dass **verschiedene Variable verschiedene Namen** haben. Wir sagen dann: Die Variablen der Formel sind **konsistent umbenannt**.

Formeln, in denen **alle Variablen verschiedene Namen** haben sind meist **besser lesbar**. Manche **Definitionen sind einfacher** für konsistent umbenannte Formeln.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 427

### Ziele:

Konsistente Umbenennung verstehen

### in der Vorlesung:

- Anwendungen ihren Definitionen zuordnen.
- Wenn in geschachtelten Wirkungsbereichen die Variablen der Quantoren dieselben Namen haben, dann ist im inneren Wirkungsbereich die äußere Variable verdeckt.
- Konsistente Umbenennung beachtet Bindungen, Substitution von Variablen aber nicht.
- Vergleich mit Programmiersprachen

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

### Verständnisfragen:

- Geben Sie ein Beispiel, wo eine unzulässige Umbenennung in einen schon verwendeten Variablennamen Bindungen verändert.

## Interpretation zu prädikatenlogischer Formel

Einer prädikatenlogischen Formel  $\alpha$  wird durch eine **Interpretation**  $\mathfrak{I}$  ( $\alpha$ ) **Bedeutung zugeordnet**, sodass man ihren Wahrheitswert (w oder f) berechnen kann.

Eine **Interpretation**  $\mathfrak{I}$  wird bestimmt durch

- einen **Individuenbereich U**, der nicht leer ist (auch Universum genannt).  
Aus U stammen die Werte der Variablen und Terme.
- eine **Abbildung der Funktions- und Prädikatsymbole** auf dazu passende konkrete Funktionen und Relationen, notiert als z. B.  $\mathfrak{I}(f)$ ,  $\mathfrak{I}(P)$
- eine **Belegung der freien Variablen mit Werten aus U**, notiert z. B.  $\mathfrak{I}(x)$ .
- die Interpretation der Junktoren und Quantoren (definiert auf Folie 4.31)

Bemerkungen:

- In der Prädikatenlogik enthält der **Individuenbereich U alle Individuen - auch verschiedenartige** - die für die Interpretation benötigt werden.  
Er ist **nicht in Wertebereiche gleichartiger Individuen** strukturiert (wie in Kapitel 2).
- **Der Sorte T** wird deshalb **der ganze Individuenbereich U** zugeordnet.
- Eine **Interpretation** wird immer **passend zu einer Menge prädikatenlogischer Formeln** definiert. Nur darin vorkommende Funktionen, Prädikate und Variable interessieren.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 428

### Ziele:

Interpretation als Zuordnung verstehen

### in der Vorlesung:

- Beispiele für Individuenbereiche U
- Vergleich mit Wertebereichen aus Abschnitt 2
- Beispiel von Mod-3.26

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel  $\alpha = (\forall x P(x, h(x))) \wedge Q(g(a, z))$  ist folgendes  $\mathfrak{I}$  eine passende Interpretation:

$U := \mathbb{N}$

$\mathfrak{I}(P) := \{ (m, n) \mid m, n \in U \text{ und } m < n \}$

$\mathfrak{I}(Q) := \{ n \mid n \in U \text{ und } n \text{ ist Primzahl} \}$

$\mathfrak{I}(h)$  ist die Nachfolgerfunktion auf  $U$ , also  $\mathfrak{I}(h)(n) = n + 1$

$\mathfrak{I}(g)$  ist die Additionsfunktion auf  $U$  also  $\mathfrak{I}(g)(m, n) = m + n$

$\mathfrak{I}(a) := 2$  (a ist eine Konstante, d.h. eine 0-stellige Funktion,  $2 \in U$ )

$\mathfrak{I}(z) := n$  (z ist eine freie Variable,  $n \in U$ )

**Bemerkungen:**

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von  $\mathfrak{I}$  zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten (Folie 4.31).

Das Beispiel stammt aus

U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 429

### Ziele:

Konkretes Beispiel verstehen

### in der Vorlesung:

- Beispiel erläutern
- Andere Funktionen einsetzen

### Verständnisfragen:

Variieren Sie das Beispiel mit anderen Funktionen und Prädikaten.

## Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei  $\alpha$  eine prädikatenlogische Formel und  $\mathfrak{I}$  eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert**  $\mathfrak{I}(\alpha)$ , indem man  $\mathfrak{I}$  **rekursiv anwendet** auf die Teile von  $\alpha$ :

- die **Prädikatsymbole und deren Terme**,
- die **Funktionssymbole und deren Terme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 430

**Ziele:**

Interpretation auf Teile einer PL-Formel anwenden

**in der Vorlesung:**

- Übersicht geben

## Interpretation von PL-Formeln (vollständige Definition)

Die Interpretation der Symbole wird auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind, erweitert:

Für jeden Term  $\mathbf{h}(t_1, \dots, t_n)$  wird definiert:  $\mathfrak{I}(\mathbf{h}(t_1, \dots, t_n)) = \mathfrak{I}(\mathbf{h})(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$ .

Für Formeln gilt (Definition durch Induktion über den Aufbau der prädikatenlogischen Formeln):

1.  $\mathfrak{I}(P(t_1, \dots, t_n)) = w$  genau dann, wenn  $(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{I}(P)$
2.  $\mathfrak{I}(t_1 = t_2) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
3.  $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = f$
4.  $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  **und**  $\mathfrak{I}(\beta) = w$
5.  $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  **oder**  $\mathfrak{I}(\beta) = w$
6.  $\mathfrak{I}(\forall x\alpha) = w$  genau dann, wenn **für jeden Wert**  $\mathbf{d} \in \mathbf{U}$  gilt  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$
7.  $\mathfrak{I}(\exists x\alpha) = w$  genau dann, wenn es **einen Wert**  $\mathbf{d} \in \mathbf{U}$  gibt mit  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$

Dabei ordnet  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha)$  in  $\alpha$  der Variablen  $x$  den Wert  $\mathbf{d}$  zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretation  $\mathfrak{I}$  überein.

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 431

**Ziele:**

Exakte Definition der Interpretation verstehen

**in der Vorlesung:**

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiel für Interpretation einer Formel

**Formel  $\alpha$ :**

$$R \wedge \forall x \forall y P(x, y)$$

**Interpretation  $\mathfrak{I}$ :**

$$U = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\mathfrak{I}(P) = \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$$

$$\mathfrak{I}(R) = w$$

**Interpretation  $\mathfrak{I}$  rekursiv gemäß Mod-4.31 angewandt:**

$$\begin{aligned} \text{Nr.:} & \quad \mathfrak{I}(R \wedge \forall x \forall y P(x, y)) \\ 4 & \quad = \mathfrak{I}(R) \text{ und } \mathfrak{I}(\forall x \forall y P(x, y)) \\ \mathfrak{I}, 6, 6 & \quad = w \text{ und für jedes } d, e \in U \text{ gilt } \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P(x, y)) \\ 1 & \quad = w \text{ und für jedes } d, e \in U \text{ gilt } (\mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(x), \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(y)) \in \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P) \\ \mathfrak{I} & \quad = w \text{ und für jedes } d, e \in \{ 1, 2, 3 \} \text{ gilt } (d, e) \in \{ (a, b) \mid a + b < 10 \} \\ & \quad = w \text{ und } w \\ & \quad = w \end{aligned}$$

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 432

**Ziele:**

Beispiel zu Mod-3.27

**in der Vorlesung:**

Erläuterungen dazu

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 2.5

## Elementare Interpretationen

Wir betrachten für die Beispiele A bis G eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  mit Individuenbereich  $U = \mathbb{N}$ .

- a. freie Variable:  $\mathfrak{I}(u) = 1 \in U, \mathfrak{I}(v) = 2 \in U$  (bestimmte Elemente von  $U$ )  
 b. 0-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(A) = w$  oder  $\mathfrak{I}(A) = f$  (boolesche Variable)  
 c. 1-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(P) = M := \{1, 2, 3\} \subseteq U$  (Teilmenge von  $U$ )  
 d. 2-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(Q) = R := \{(1, 2), (2, 2)\} \subseteq U \times U$  (Relation auf  $U$ )

- A.  $\mathfrak{I}(P(u)) = w$       gdw  $\mathfrak{I}(u) \in \mathfrak{I}(P)$ , d. h.  $1 \in M$   
 B.  $\mathfrak{I}(Q(u, v)) = w$       gdw  $(\mathfrak{I}(u), \mathfrak{I}(v)) \in \mathfrak{I}(Q)$ , d. h.  $(1, 2) \in R$   
 C.  $\mathfrak{I}(\forall x P(x)) = w$       gdw (Für alle  $d \in U$  gilt:  $d \in M$ ) = f, d. h.  $M \neq U$   
 D.  $\mathfrak{I}(\exists x P(x)) = w$       gdw Es existiert  $d \in U$  mit  $d \in M$ ,  $M \neq \emptyset$   
 E.  $\mathfrak{I}(\forall x Q(x, x)) = w$       gdw (Für alle  $d \in U$  gilt:  $(d, d) \in R$ ) = f, d. h.  $R$  ist nicht reflexiv  
 F.  $\mathfrak{I}(\exists x Q(x, x)) = w$       gdw Es gibt ein  $d \in U$  mit  $(d, d) \in R$ , d. h.  $R$  ist nicht irreflexiv  
 G.  $\mathfrak{I}(\forall x \forall y (Q(x, y) \wedge Q(y, x) \rightarrow x = y)) = w$   
     gdw Für alle  $d, e \in U$  gilt: aus  $(d, e) \in R$  und  $(e, d) \in R$  folgt  $d = e$ ,  
     d. h.  $R$  ist antisymmetrisch

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 433

### Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

### in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beschränkung von Wertebereichen

In der **Prädikatenlogik** kann die **Interpretation von Variablen** Werte aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen (im Unterschied zu einem **Wertebereich**).  
Deshalb muss eine **Einschränkung explizit als Relation** formuliert werden.

### Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation $\rightarrow$ :

„Für alle  $m \in U$  gilt: aus  $m \in M$  folgt  $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\forall m \in M: Q(m, n)$ “

als PL-Formel:  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$

ausführliche Notation:

abkürzende Notation:

Beispiele: Für alle  $i \in U$  gilt: aus  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  folgt  $b_i = a_i^2$

$\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}: b_i = a_i^2$

Für alle  $k \in U$  gilt: aus  $k \in \mathbb{N}$  folgt  $a + k \geq a$

$\forall k \in \mathbb{N}: a + k \geq a$

### Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion $\wedge$ :

„Es gibt ein  $m \in U$ , sodass  $m \in M$  und  $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\exists m \in M: Q(m, n)$ “

PL-Formel:  $\exists x (P(x) \wedge Q(x, y))$

Beispiele: Es gibt ein  $k \in U$ , sodass  $k \in \mathbb{N}$  und  $a * k = b$

$\exists k \in \mathbb{N}: a * k = b$

Es gibt ein  $i \in U$ , sodass  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  und  $a_i = x$

$\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}: a_i = x$

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 434

### Ziele:

Prädikate präzisieren Wertebereiche

### in der Vorlesung:

- Begründung der Implikation und der Konjunktion
- Erläuterung der Beispiele

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (1)

Die Variablen in Gleichungen konkreter Algebren sind durch Allquantoren gebunden:

**Axiom K3:**  $\text{pop}(\text{push}(k, x)) \rightarrow k$  (in der abstrakten Keller-Algebra)

**Gleichung:**  $\forall a \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$  (konkrete Algebra)

**PL-Formel:**  $\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)$

**Interpretation:**  $U = \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{I}(S) = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{I}(P) = \mathbb{N}^*$

$\mathfrak{I}(h) = \text{remove}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ,

$\mathfrak{I}(g) = \text{append}: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

**Es gilt:**  $\mathfrak{I}(\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)) = w$

gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \mathfrak{I}_{[k/a, x/n]}(P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k) = w$

gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \text{Aus } a \in \mathbb{N}^* \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ folgt: } \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$

gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 435

**Ziele:**

Beispiel zur Definition der Interpretation

**in der Vorlesung:**

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (2)

Aus der Analysis:

Eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a(n) = a_n$ , heißt Nullfolge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n_0 < n : |a_n| < \varepsilon$$

Dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!

PL-Formel  $\alpha$ :  $\forall x(P_1(x) \rightarrow \exists y(P_2(y) \wedge \forall z(P_2(z) \wedge Q(y, z)) \rightarrow Q(h(z), x)))$

Interpretation:  $U = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{I}(P_1) = \mathbb{R}^+$ ,  $\mathfrak{I}(P_2) = \mathbb{N}$ ,

$$\mathfrak{I}(Q) = \{ (r, s) \mid (r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ und } r < s \},$$

$$\mathfrak{I}(h) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{I}(h)(i) = |a_i|$$

Es gilt:  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$       gdw       $a_n$  ist eine Nullfolge

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 436

**Ziele:**

Beispiel zur Definition der Interpretation

**in der Vorlesung:**

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (3)

Aus der Informatik:

Eine Folge  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  heißt monoton wachsend, wenn gilt

$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \forall j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $i \leq j$  gilt  $a_i \leq a_j$

PL-Formel  $\beta$  :  $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow Q(h(x), h(y))))$

Interpretation:  $U = \mathbb{N}^k \cup \{1, \dots, k\}$ ,  $\mathfrak{I}(P) = \{1, \dots, k\}$ ,

$\mathfrak{I}(Q) = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \}$

$\mathfrak{I}(h) : \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{I}(h)(i) = a_i$

Es gilt:  $\mathfrak{I}(\beta) = w$       gdw       $a_n$  ist monoton wachsend

Was bedeutet  $\mathfrak{I}(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (Q(h(x), h(y)) \wedge (h(x) = h(y) \rightarrow Q(x, y)))) = w$   
mit  $\mathfrak{I}(x) = i, i \in \{1, \dots, k\}$ , bei sonst unveränderter Interpretation?

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 437

**Ziele:**

Beispiel zur Definition der Interpretation

**in der Vorlesung:**

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

gegeben:

Kantenlänge  $n \in \mathbb{N}$  eines  $n * n$  Schachbrettes

gesucht:

Menge  $P$  zulässiger Platzierungen von jeweils  $n$  Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:

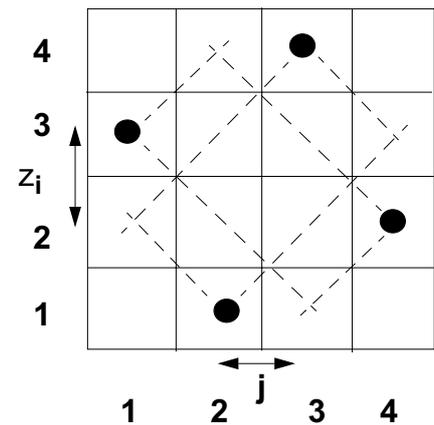
Sei  $\text{Index} := \{1, \dots, n\}$

$P := \{ p \mid p = (z_1, \dots, z_n) \in \text{Index}^n \wedge \text{zulässig}(p) \}$

$z_i$  gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte  $i$  an.

Dabei bedeutet

zulässig  $(p): \forall i \in \text{Index}: \forall j \in \text{Index}: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge |z_i - z_j| \neq |i - j|$



## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 438

### Ziele:

Spezifikation einer Aufgabe

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

## Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.

**Aber:** Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.

Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**“ und „**allgemeingültig**“ für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  gilt, heißt  $\mathfrak{I}$  auch ein **Modell der Formel**  $\alpha$ .
- Eine Formel  $\alpha$  heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  gibt, so dass gilt  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ , sonst ist sie **widerspruchsvoll**.
- Eine Formel  $\alpha$  heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von  $\alpha$  gilt  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ , sonst ist sie **falsifizierbar**.
- Eine Formel  $\alpha$  ist genau dann **allgemeingültig**, wenn  $\neg \alpha$  **widerspruchsvoll** ist.
- Zwei Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  sind **logisch äquivalent**, in Zeichen:  $\alpha \equiv \beta$ , wenn sie für alle Interpretationen  $\mathfrak{I}$  dasselbe Ergebnis haben:  $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$
- Sei  $F$  eine Menge von Formeln und  $\alpha$  eine Formel.  
Wenn für **alle Interpretationen**  $\mathfrak{I}$ , die alle Formeln in  $F$  erfüllen, auch  $\mathfrak{I}(\alpha)$  gilt, dann sagen wir „ $\alpha$  **folgt semantisch aus**  $F$ “ bzw.  $F \models \alpha$ ;  
 $F \models \alpha$  heißt auch **logischer Schluss**.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 439

### Ziele:

Analoge Begriffe wie in der Aussagenlogik

### in der Vorlesung:

- gleiche Definition der Begriffe
- Interpretation unterscheidet sich von der in der Aussagenlogik
- Die Menge der Interpretationen kann i.a. nicht überprüft werden.

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

# Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige prädikatenlogische Formel. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

## 1. Negation:

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

## 2. Wirkungsbereich der Quantoren verändern:

Falls  $x$  in  $\beta$  nicht frei vorkommt, gilt

$$(\forall x \alpha) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\forall x \alpha) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$$

$$(\exists x \alpha) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\exists x \alpha) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

$$\beta \equiv \exists x \beta$$

$$\beta \equiv \forall x \beta$$

## 3. Quantoren zusammenfassen:

$$(\forall x \alpha \wedge \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\exists x \alpha \vee \exists x \beta) \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:

$$(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \not\equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$$

$$(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \not\equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

## 4. Quantoren vertauschen:

$$\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$$

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 440

### Ziele:

Wichtige Äquivalenzen einprägen

### in der Vorlesung:

- 1 - 4 begründen
- Eine Äquivalenz beweisen
- Beispiel für Umformungen

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

# Beispiele für Äquivalenzen

## 1. Negation:

formal

	Alle haben den Schuss gehört.	$\forall x \text{ gehört}(x)$
negiert:	Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\exists x \neg \text{ gehört}(x)$
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg \text{ gehört}(x)$

$$\neg \forall i \in \text{Ind}: a_i < 10$$

$$\text{gdw } \neg \forall i (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$$

$$\text{gdw } \exists i \neg (\neg i \in \text{Ind} \vee a_i < 10)$$

$$\text{gdw } \exists i (i \in \text{Ind} \wedge \neg a_i < 10)$$

$$\text{gdw } \exists i \in \text{Ind}: a_i \geq 10$$

$$(\exists x P(x)) \rightarrow P(y)$$

$$\equiv \neg(\exists x P(x)) \vee P(y)$$

$$\equiv (\forall x \neg P(x)) \vee P(y)$$

$$\equiv \forall x (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\equiv \forall x (P(x) \rightarrow P(y))$$

## 2. Zusammenfassung von Quantoren:

**Äquivalent:**

$$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \wedge (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i) \text{ gdw } \forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$$

**Nicht äquivalent, vielmehr gilt nur:**

$$\text{Aus } (\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \vee (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i) \text{ folgt } \forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$$

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 441

### Ziele:

Beispiele für Mod-3.32

### in der Vorlesung:

- Schrittweise umformen
- weitere Beispiele

### nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Beispiel für Umformungen

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

$\neg(\exists x P(x, y) \vee \forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	DeMorgan
$\equiv (\neg\exists x P(x, y) \wedge \neg\forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	Negation von Quantorformeln (x, z)
$\equiv (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	Kommutativität
$\equiv \exists u f(a, u) = a \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))$	Wirkungsbereiche ausweiten (u, x)
$\equiv \exists u (f(a, u) = a \wedge \forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)))$	Kommutativität (2 mal)
$\equiv \exists u (\forall x (\exists z \neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereich ausweiten (z)
$\equiv \exists u (\forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereiche ausweiten (x, z)
$\equiv \exists u \forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge f(a, u) = a)$	

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 442

### Ziele:

Äquivalenzen anwenden

### in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

- Anwendungsstellen zeigen,
- **jeder Schritt einzeln (PDF)**

## Normalformen

- **Definition:** Eine PL-Formel  $\alpha$  ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen in  $\alpha$  unmittelbar vor einer Primformel steht und  $\alpha$  die Junktoren  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  nicht enthält.
- **Definition:** Eine PL-Formel  $\alpha$  ist in **pränexer Normalform (PNF)** genau dann, wenn sie von der Form  $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \beta$  ist, wobei  $Q_i$  Quantoren sind und  $\beta$  keine Quantoren enthält.
- **Satz:** Zu jeder PL-Formel gibt es **logisch äquivalente Formeln** in Negationsnormalform bzw. in pränexer Normalform.

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 443

**Ziele:**

Normalformen kennen

**in der Vorlesung:**

Begriffe erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Erzeugung der PNF

Die Erzeugung der pränexen Normalform geschieht in zwei Schritten:

1. Konsistente **Umbenennung** der Variablen (siehe Folie 4.27)
2. Quantoren nach links mit Hilfe der folgenden **Ersetzungsregeln** (Äquivalenzen):
  - a. Ersetze  $(\forall x\alpha) \wedge \beta$  durch  $\forall x(\alpha \wedge \beta)$  (wegen (1) kommt x nicht frei in  $\beta$  vor)
  - b. Ersetze  $(\exists x\alpha) \wedge \beta$  durch  $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
  - c. Ersetze  $(\forall x\alpha) \vee \beta$  durch  $\forall x(\alpha \vee \beta)$
  - d. Ersetze  $(\exists x\alpha) \vee \beta$  durch  $\exists x(\alpha \vee \beta)$
  - e. Ersetze  $\neg\forall x\alpha$  durch  $\exists x\neg\alpha$
  - f. Ersetze  $\neg\exists x\alpha$  durch  $\forall x\neg\alpha$

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 444

**Ziele:**

Regeln zur Erzeugung der PNF kennen

**in der Vorlesung:**

Am Beispiel erläutern

**nachlesen:**

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Komplexität der Prädikatenlogik erster Stufe

- Es gibt für die Prädikatenlogik erster Stufe einen **vollständigen, korrekten Kalkül** zur Herleitung allgemeingültiger Formeln.
- Die Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**, d. h. es gibt kein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist.
- Die Prädikatenlogik ist **rekursiv aufzählbar**, d. h. es gibt ein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist, das aber im negativen Fall nicht notwendig terminiert.
- Die **natürlichen Zahlen** lassen sich in der Prädikatenlogik erster Stufe **nicht** modellieren.

### Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 445

**Ziele:**

Grundsätzliche Aussagen über PL kennen

**in der Vorlesung:**

Aussagen erläutern

**nachlesen:**

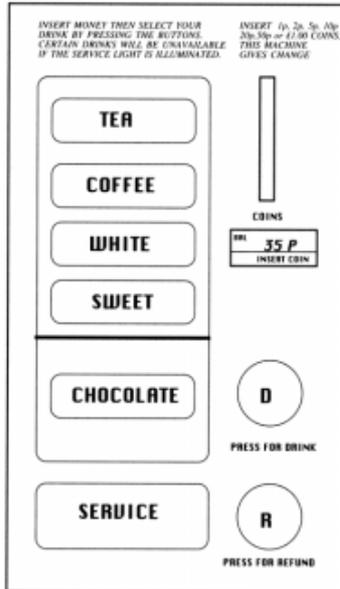
Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

## Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationsprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet **Prädikatenlogik**.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine“ aus

Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff



*Get\_Drink*

$\Delta$ *Abs\_State\_Machine*

*choice?* :  $\mathbb{P}$ *Selection\_buttons*

*d!* : *Drink*

*Change!* : *bag British\_coin*

*choice?*  $\in$  *Drink*

*Value Balance*  $\geq$  *Prices choice?*

$\forall i$  : *Recipe choice?*  $\bullet$  *count Stock i*  $>$  0

*Cups*  $>$  0

$\exists b$  : *bag British\_coins*  $\bullet$  (*b*  $\sqsubseteq$  *Takings*  $\wedge$  *Value Balance* = *Value b* + *Prices choice?*)

*Balance'* =  $\llbracket \ ]$

*Stock'*  $\uplus$  {*i* : *Recipe choice?*  $\bullet$  *i*  $\mapsto$  1} = *Stock*

*Cups'* = *Cups* - 1

*Change!*  $\sqsubseteq$  *Takings*  $\wedge$  *Value Balance* = *Value Change!* + *Prices choice?*

*Takings'*  $\uplus$  *Change!* = *Takings*

*Prices'* = *Prices*

*Service\_light'* = *Service\_light*

*Report\_display'* = *insert coin*

*d!* = *choice?*

## Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 446

### Ziele:

Ausschnitt aus einem größeren Beispiel

### in der Vorlesung:

Erläuterungen zur

- Sprache Z,
- zur gestellten Aufgabe,
- zum Ausschnitt aus der Spezifikation