

4.2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen, Variablen, Junktoren**.
Zusätzliche Konzepte:

- $A = (\mathcal{T}, \Sigma)$ ist die so genannte **Termalgebra** (mit Variablen, ohne Axiome) mit Signatur $\Sigma = (\{T\}, F)$, wobei T die Sorte „Term“ ist und alle Operationen $f \in F$ von der Form $f: T^n \rightarrow T$ sind. **Terme** sind die korrekten Terme bzgl. dieser Termalgebra.
- **n-stellige Prädikate** sind Operationen $P: T^n \rightarrow \text{BOOL}$. In einer Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen,
z. B. „x ist eine Katze“ bzw. als Formel: $\text{istKatze}(x)$
 $\text{teilt}(a,b)$, $\text{größterGemeinsamerTeiler}(a, b, g)$
- **Quantoren** „für alle x gilt α “ und „es gibt ein x, so dass α gilt“
in Symbolen: $\forall x\alpha$ bzw. $\exists x\alpha$
Beispiel: $\forall x (\text{esIstNacht} \wedge \text{istKatze}(x) \rightarrow \text{istGru}(x))$;
in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau.“

Schon zur **Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte der **Prädikatenlogik**,

z. B. **größter gemeinsamer Teiler**:

gegeben: $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$;
gesucht: **größter gemeinsamer Teiler** g von a und b , d. h.
 $\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow h \leq g))$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 421

Ziele:

Motivation der Prädikatenlogik

in der Vorlesung:

- Parametrisierung von Aussagen verdeutlichen
- Prädikate und Relationen
- Quantoren intuitiv
- Einsatz in der Modellierung

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

Warum kann man einfache Aufgaben für algorithmische Berechnungen nicht mit Aussagenlogik modellieren?

Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik
Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, widerspruchsvoll**:
wie in der Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in der Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 422

Ziele:

Übersicht

in der Vorlesung:

Vergleich mit Aussagenlogik

Prädikatenlogische Formeln

Prädikatenlogische Formeln (PL-Formeln) werden induktiv wie folgt definiert:

- Primformeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form $P(t_1, \dots, t_n)$ oder Gleichungen in der Form $t_1 = t_2$.
Dabei ist P ein n -stelliges Prädikatsymbol und die t_i sind Terme der Termalgebra.
0-stellige Prädikatsymbole entsprechen den atomaren **Aussagen der Aussagenlogik**.
- logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:
 $\neg\alpha$ $\alpha \wedge \beta$ $\alpha \vee \beta$
sowie $\alpha \rightarrow \beta$ $\alpha \leftrightarrow \beta$ **als Abkürzungen**
mit prädikatenlogischen Formeln α und β
- der **Allquantor** \forall und der **Existenzquantor** \exists bilden prädikatenlogische Formeln:
 $\forall x \alpha$ und $\exists x \alpha$
mit der prädikatenlogischen Formel α ; sie definieren die Variable x

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

Quantoren haben die gleiche **Präzedenz** wie \neg , also höhere als \wedge .

Beispiele:

$\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow \leq(h, g)))$ (siehe Folie 4.21)

$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z)$ „R ist eine Funktion“

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 423

Ziele:

Notation und Struktur

in der Vorlesung:

- Beispiele
- Struktur an Bäumen erläutern
- Signatur explizit machen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Zeigen Sie, dass die Formeln auf Folie Mod-4.21 syntaktisch korrekt sind.
- Zu welchen Signaturen gehören ihre Terme?

Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur Σ wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe: Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**. Nur solche Variablen dürfen quantifiziert werden.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 424

Ziele:

PL Formeln in der Praxis

in der Vorlesung:

- Anmerkungen erläutern
- PL erster Stufe abgrenzen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Vorkommen von Variablen

Wir sagen: (Eine Variable mit Namen) **x** kommt in einer PL-Formel α vor, wenn sie in einer Primformel und dort in einem Term vorkommt.

Für eine PL-Formel der Form $\forall x \alpha$ oder $\exists x \alpha$ ist α der **Wirkungsbereich (für x) des Quantors**. x ist der **Name der Variablen des Quantors**.

Beispiel:

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y (P(y) \wedge \forall z R(y, z))$$

Quantoren mit ihren Wirkungsbereichen

Anmerkungen:

- Eine Variable hat einen Namen; **mehrere Variable können den gleichen Namen haben**.
- Ein Quantor definiert eine Variable, z. B. $\forall x \alpha$ definiert (eine Variable mit Namen) x. Ihr **Name kann im Wirkungsbereich (auch mehrfach) vorkommen**.
- **Wirkungsbereiche** von Quantoren können **geschachtelt** sein, sogar mit (verschiedenen) Variablen, die **dieselben Namen** haben.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 425

Ziele:

Bindung von Namen verstehen

in der Vorlesung:

- Wirkungsbereiche erläutern, und an Bäumen zeigen
- Variablendefinition und ihre Anwendungen
- Unterschied: Variable, ihr Name, dessen Vorkommen in einer Formel
- Vergleich mit Variablendeklarationen in Programmen

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Freie und gebundene Variable

(Ein Vorkommen von) **x** in einer Formel α heißt **frei**, wenn es nicht im Wirkungsbereich für x eines Quantors liegt.

Ein **Quantor** $\forall x \alpha$ bzw. $\exists x \alpha$ **bindet** alle (Vorkommen von) x, die frei sind in α . (Das Vorkommen von) x heißt dann **gebunden**.

Beispiel: Formel α

$$R(y) \wedge \exists y (P(y, x) \vee Q(y, z))$$

freie Vorkommen
gebundene Vorkommen

In α gibt es 3 freie Variable; sie haben die Namen y, x, z.

2 Variable haben den Namen y; eine kommt frei vor in $R(y)$, die andere kommt 2 mal gebunden in α vor.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 426

Ziele:

Freie Variable erkennen

in der Vorlesung:

- Variable sind frei in Bezug auf eine (Teil-)Formel,
- weiter außen werden sie an eine Bedeutung gebunden.

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Umbenennung von Variablen

In einer Formel können mehrere Vorkommen von Quantoren **verschiedene Variable mit gleichem Namen** einführen und in ihrem Wirkungsbereich binden:

Beispiele:

$$\forall y (\exists x R(x, y) \wedge \exists x Q(x, y)) \quad \forall x \forall y (P(x, y) \wedge \exists x R(x, y))$$

Umbenennung: In einer Formel kann man **alle (gebundenen) Vorkommen des Namens x der Variablen eines Quantors in dessen Wirkungsbereich durch einen neuen Namen z ersetzen**, der sonst nicht in der Formel vorkommt. Die Bedeutung der Formel, (genauer: semantische Aussagen über sie), ändert sich dadurch nicht.

Beispiele von oben:

$$\forall y (\exists x R(x, y) \wedge \exists z Q(z, y)) \quad \forall x \forall y (P(x, y) \wedge \exists z R(z, y))$$

Damit kann man erreichen, dass **verschiedene Variable verschiedene Namen** haben. Wir sagen dann: Die Variablen der Formel sind **konsistent umbenannt**. Formeln, in denen **alle Variablen verschiedene Namen** haben sind meist **besser lesbar**. Manche **Definitionen sind einfacher** für konsistent umbenannte Formeln.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 427

Ziele:

Konsistente Umbenennung verstehen

in der Vorlesung:

- Anwendungen ihren Definitionen zuordnen.
- Wenn in geschichteten Wirkungsbereichen die Variablen der Quantoren dieselben Namen haben, dann ist im inneren Wirkungsbereich die äußere Variable verdeckt.
- Konsistente Umbenennung beachtet Bindungen, Substitution von Variablen aber nicht.
- Vergleich mit Programmiersprachen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Verständnisfragen:

- Geben Sie ein Beispiel, wo eine unzulässige Umbenennung in einen schon verwendeten Variablenamen Bindungen verändert.

Interpretation zu prädikatenlogischer Formel

Einer prädikatenlogischen Formel α wird durch eine **Interpretation** \mathfrak{I} (α) **Bedeutung zugeordnet**, sodass man ihren Wahrheitswert (w oder f) berechnen kann.

Eine **Interpretation** \mathfrak{I} wird bestimmt durch

- einen **Individuenbereich U**, der nicht leer ist (auch Universum genannt). Aus U stammen die Werte der Variablen und Terme.
- eine **Abbildung der Funktions- und Prädikatsymbole** auf dazu passende konkrete Funktionen und Relationen, notiert als z. B. $\mathfrak{I}(h)$, $\mathfrak{I}(P)$
- eine **Belegung der freien Variablen mit Werten aus U**, notiert z. B. $\mathfrak{I}(x)$.
- die Interpretation der Junktoren und Quantoren (definiert auf Folie 4.31)

Bemerkungen:

- In der Prädikatenlogik enthält der **Individuenbereich U alle Individuen - auch verschiedenartige** - die für die Interpretation benötigt werden. Er ist **nicht in Wertebereiche gleichartiger Individuen** strukturiert (wie in Kapitel 2).
- **Der Sorte T** wird deshalb **der ganze Individuenbereich U** zugeordnet.
- Eine **Interpretation** wird immer **passend zu einer Menge prädikatenlogischer Formeln** definiert. Nur darin vorkommende Funktionen, Prädikate und Variable interessieren.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 428

Ziele:

Interpretation als Zuordnung verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiele für Individuenbereiche U
- Vergleich mit Wertebereichen aus Abschnitt 2
- Beispiel von Mod-3.26

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel $\alpha = (\forall x P(x, h(x))) \wedge Q(g(a, z))$ ist folgendes \mathfrak{I} eine passende Interpretation:

$U := \mathbb{N}$

$\mathfrak{I}(P) := \{ (m, n) \mid m, n \in U \text{ und } m < n \}$

$\mathfrak{I}(Q) := \{ n \mid n \in U \text{ und } n \text{ ist Primzahl} \}$

$\mathfrak{I}(h)$ ist die Nachfolgerfunktion auf U , also $\mathfrak{I}(h)(n) = n + 1$

$\mathfrak{I}(g)$ ist die Additionsfunktion auf U also $\mathfrak{I}(g)(m, n) = m + n$

$\mathfrak{I}(a) := 2$ (a ist eine Konstante, d.h. eine 0-stellige Funktion, $2 \in U$)

$\mathfrak{I}(z) := n$ (z ist eine freie Variable, $n \in U$)

Bemerkungen:

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von \mathfrak{I} zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten (Folie 4.31).

Das Beispiel stammt aus

U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 429

Ziele:

Konkretes Beispiel verstehen

in der Vorlesung:

- Beispiel erläutern
- Andere Funktionen einsetzen

Verständnisfragen:

Variieren Sie das Beispiel mit anderen Funktionen und Prädikaten.

Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei α eine prädikatenlogische Formel und \mathfrak{I} eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert** $\mathfrak{I}(\alpha)$, indem man \mathfrak{I} **rekursiv anwendet** auf die Teile von α :

- die **Prädikatsymbole und deren Terme**,
- die **Funktionssymbole und deren Terme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 430

Ziele:

Interpretation auf Teile einer PL-Formel anwenden

in der Vorlesung:

- Übersicht geben

Interpretation von PL-Formeln (vollständige Definition)

Die Interpretation der Symbole wird auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind, erweitert:

Für jeden Term $h(t_1, \dots, t_n)$ wird definiert: $\mathfrak{I}(h(t_1, \dots, t_n)) = \mathfrak{I}(h)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$.

Für Formeln gilt (Definition durch Induktion über den Aufbau der prädikatenlogischen Formeln):

1. $\mathfrak{I}(P(t_1, \dots, t_n)) = w$ genau dann, wenn $(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{I}(P)$
2. $\mathfrak{I}(t_1 = t_2) = w$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
3. $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = w$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = f$
4. $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = w$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ **und** $\mathfrak{I}(\beta) = w$
5. $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = w$ genau dann, wenn $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ **oder** $\mathfrak{I}(\beta) = w$
6. $\mathfrak{I}(\forall x\alpha) = w$ genau dann, wenn **für jeden Wert $d \in U$ gilt** $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$
7. $\mathfrak{I}(\exists x\alpha) = w$ genau dann, wenn es **einen Wert $d \in U$ gibt** mit $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$

Dabei ordnet $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha)$ in α der Variablen x den Wert d zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretation \mathfrak{I} überein.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 431

Ziele:

Exakte Definition der Interpretation verstehen

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel für Interpretation einer Formel

Formel α :

$$R \wedge \forall x \forall y P(x, y)$$

Interpretation \mathfrak{I} :

$$U = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathfrak{I}(P) = \{(a, b) \mid a + b < 10\}$$

$$\mathfrak{I}(R) = w$$

Interpretation \mathfrak{I} rekursiv gemäß Mod-4.31 angewandt:

$$\begin{aligned} \text{Nr.:} & \quad \mathfrak{I}(R \wedge \forall x \forall y P(x, y)) \\ 4 & = \mathfrak{I}(R) \text{ und } \mathfrak{I}(\forall x \forall y P(x, y)) \\ \mathfrak{I}, 6, 6 & = w \text{ und für jedes } d, e \in U \text{ gilt } \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P(x, y)) \\ 1 & = w \text{ und für jedes } d, e \in U \text{ gilt } (\mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(x), \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(y)) \in \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P) \\ \mathfrak{I} & = w \text{ und für jedes } d, e \in \{1, 2, 3\} \text{ gilt } (d, e) \in \{(a, b) \mid a + b < 10\} \\ & = w \text{ und } w \\ & = w \end{aligned}$$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 432

Ziele:

Beispiel zu Mod-3.27

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 2.5

Elementare Interpretationen

Wir betrachten für die Beispiele A bis G eine Interpretation \mathfrak{I} mit Individuenbereich $U = \mathbb{N}$.

- a. freie Variable: $\mathfrak{I}(u) = 1 \in U, \mathfrak{I}(v) = 2 \in U$ (bestimmte Elemente von U)
- b. 0-stellige Prädikate: $\mathfrak{I}(A) = w$ oder $\mathfrak{I}(A) = f$ (boolesche Variable)
- c. 1-stellige Prädikate: $\mathfrak{I}(P) = M := \{1, 2, 3\} \subseteq U$ (Teilmenge von U)
- d. 2-stellige Prädikate: $\mathfrak{I}(Q) = R := \{(1, 2), (2, 2)\} \subseteq U \times U$ (Relation auf U)
- A. $\mathfrak{I}(P(u)) = w$ gdw $\mathfrak{I}(u) \in \mathfrak{I}(P)$, d. h. $1 \in M$
- B. $\mathfrak{I}(Q(u, v)) = w$ gdw $(\mathfrak{I}(u), \mathfrak{I}(v)) \in \mathfrak{I}(Q)$, d. h. $(1, 2) \in R$
- C. $\mathfrak{I}(\forall x P(x)) = w$ gdw (Für alle $d \in U$ gilt: $d \in M$) = f, d. h. $M \neq U$
- D. $\mathfrak{I}(\exists x P(x)) = w$ gdw Es existiert $d \in U$ mit $d \in M, M \neq \emptyset$
- E. $\mathfrak{I}(\forall x Q(x, x)) = w$ gdw (Für alle $d \in U$ gilt: $(d, d) \in R$) = f, d. h. R ist nicht reflexiv
- F. $\mathfrak{I}(\exists x Q(x, x)) = w$ gdw Es gibt ein $d \in U$ mit $(d, d) \in R$, d. h. R ist nicht irreflexiv
- G. $\mathfrak{I}(\forall x \forall y (Q(x, y) \wedge Q(y, x) \rightarrow x = y)) = w$
gdw Für alle $d, e \in U$ gilt: aus $(d, e) \in R$ und $(e, d) \in R$ folgt $d = e$,
d. h. R ist antisymmetrisch

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 433

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beschränkung von Wertebereichen

In der **Prädikatenlogik** kann die **Interpretation von Variablen** Werte aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen (im Unterschied zu einem **Wertebereich**). Deshalb muss eine **Einschränkung explizit als Relation** formuliert werden.

Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation \rightarrow :

„Für alle $m \in U$ gilt: aus $m \in M$ folgt $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\forall m \in M: Q(m, n)$ “

als PL-Formel: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$

ausführliche Notation:

abkürzende Notation:

Beispiele: Für alle $i \in U$ gilt: aus $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ folgt $b_i = a_i^2$ $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}: b_i = a_i^2$

Für alle $k \in U$ gilt: aus $k \in \mathbb{N}$ folgt $a + k \geq a$ $\forall k \in \mathbb{N}: a + k \geq a$

Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion \wedge :

„Es gibt ein $m \in U$, sodass $m \in M$ und $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\exists m \in M: Q(m, n)$ “

PL-Formel: $\exists x (P(x) \wedge Q(x, y))$

Beispiele: Es gibt ein $k \in U$, sodass $k \in \mathbb{N}$ und $a * k = b$ $\exists k \in \mathbb{N}: a * k = b$

Es gibt ein $i \in U$, sodass $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $a_i = x$ $\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}: a_i = x$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 434

Ziele:

Prädikate präzisieren Wertebereiche

in der Vorlesung:

- Begründung der Implikation und der Konjunktion
- Erläuterung der Beispiele

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (1)

Die Variablen in Gleichungen konkreter Algebren sind durch Allquantoren gebunden:

Axiom K3: $\text{pop}(\text{push}(k, x)) \rightarrow k$ (in der abstrakten Keller-Algebra)

Gleichung: $\forall a \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$ (konkrete Algebra)

PL-Formel: $\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}, \mathfrak{I}(S) = \mathbb{N}, \mathfrak{I}(P) = \mathbb{N}^*$

$\mathfrak{I}(h) = \text{remove}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*,$

$\mathfrak{I}(g) = \text{append}: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

Es gilt: $\mathfrak{I}(\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \mathfrak{I}_{[k/a, x/n]}(P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k) = w$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \text{Aus } a \in \mathbb{N}^* \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ folgt: } \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$

gdw $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 435

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (2)

Aus der Analysis:

Eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(n) = a_n$, heißt Nullfolge, wenn gilt

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n_0 < n : |a_n| < \varepsilon$

Dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!

PL-Formel α : $\forall x(P_1(x) \rightarrow \exists y(P_2(y) \wedge \forall z(P_2(z) \wedge Q(y, z)) \rightarrow Q(h(z, x))))$

Interpretation: $U = \mathbb{R}, \mathfrak{I}(P_1) = \mathbb{R}^+, \mathfrak{I}(P_2) = \mathbb{N},$

$\mathfrak{I}(Q) = \{ (r, s) \mid (r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ und } r < s \},$

$\mathfrak{I}(h) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \mathfrak{I}(h)(i) = |a_i|$

Es gilt: $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ gdw a_n ist eine Nullfolge

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 436

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (3)

Aus der Informatik:

Eine Folge $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ heißt monoton wachsend, wenn gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \forall j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } i \leq j \text{ gilt } a_i \leq a_j$$

PL-Formel β : $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow Q(h(x), h(y))))$

Interpretation: $U = \mathbb{N}^k \cup \{1, \dots, k\}, \mathfrak{I}(P) = \{1, \dots, k\},$

$$\mathfrak{I}(Q) = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \}$$

$$\mathfrak{I}(h) : \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{N}, \mathfrak{I}(h)(i) = a_i$$

Es gilt: $\mathfrak{I}(\beta) = w$ gdw a_n ist monoton wachsend

Was bedeutet $\mathfrak{I}(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (Q(h(x), h(y)) \wedge (h(x) = h(y) \rightarrow Q(x, y)))) = w$
mit $\mathfrak{I}(x) = i, i \in \{1, \dots, k\}$, bei sonst unveränderter Interpretation?

Ziele:

Beispiel zur Definition der Interpretation

in der Vorlesung:

- rekursive Anwendung der Interpretation am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

gegeben:

Kantenlänge $n \in \mathbb{N}$ eines $n * n$ Schachbrettes

gesucht:

Menge P zulässiger Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:

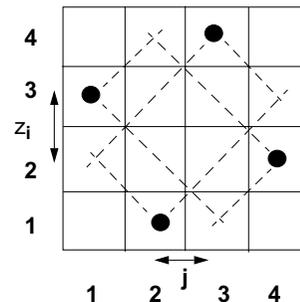
Sei Index := $\{1, \dots, n\}$

$$P := \{ p \mid p = (z_1, \dots, z_n) \in \text{Index}^n \wedge \text{zulässig}(p) \}$$

z_i gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte i an.

Dabei bedeutet

$$\text{zulässig}(p): \forall i \in \text{Index}: \forall j \in \text{Index}: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge |z_i - z_j| \neq |i - j|$$



Ziele:

Spezifikation einer Aufgabe

in der Vorlesung:

Erläuterungen dazu

Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.

Aber: Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.

Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**“ und „**allgemeingültig**“ für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ gilt, heißt \mathfrak{I} auch ein **Modell der Formel α** .
- Eine Formel α heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation \mathfrak{I} gibt, so dass gilt $\mathfrak{I}(\alpha) = w$, sonst ist sie **widerspruchsvoll**.
- Eine Formel α heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von α gilt $\mathfrak{I}(\alpha) = w$, sonst ist sie **falsifizierbar**.
- Eine Formel α ist genau dann **allgemeingültig**, wenn $\neg \alpha$ **widerspruchsvoll** ist.
- Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen: $\alpha \equiv \beta$, wenn sie für alle Interpretationen \mathfrak{I} dasselbe Ergebnis haben: $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$
- Sei F eine Menge von Formeln und α eine Formel.
Wenn für **alle Interpretationen** \mathfrak{I} , die alle Formeln in F erfüllen, auch $\mathfrak{I}(\alpha)$ gilt, dann sagen wir, „ **α folgt semantisch aus F** “ bzw. $F \models \alpha$;
 $F \models \alpha$ heißt auch **logischer Schluss**.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 439

Ziele:

Analoge Begriffe wie in der Aussagenlogik

in der Vorlesung:

- gleiche Definition der Begriffe
- Interpretation unterscheidet sich von der in der Aussagenlogik
- Die Menge der Interpretationen kann i.a. nicht überprüft werden.

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien α und β beliebige prädikatenlogische Formel. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

1. Negation:

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha \qquad \neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

2. Wirkungsbereich der Quantoren verändern:

Falls x in β nicht frei vorkommt, gilt

$$(\forall x \alpha) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta) \qquad (\forall x \alpha) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$$

$$(\exists x \alpha) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta) \qquad (\exists x \alpha) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

$$\beta \equiv \exists x \beta \qquad \beta \equiv \forall x \beta$$

3. Quantoren zusammenfassen:

$$(\forall x \alpha \wedge \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta) \qquad (\exists x \alpha \vee \exists x \beta) \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:

$$(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \not\equiv \forall x (\alpha \vee \beta) \qquad (\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \not\equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

4. Quantoren vertauschen:

$$\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha \qquad \exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 440

Ziele:

Wichtige Äquivalenzen einprägen

in der Vorlesung:

- 1 - 4 begründen
- Eine Äquivalenz beweisen
- Beispiel für Umformungen

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Ziele:
Beispiele für Mod-3.32

in der Vorlesung:
• Schrittweise umformen
• weitere Beispiele

nachlesen:
Kastens, Kleine Bünig: Modellierung, Abschnitt 4.2

Beispiele für Äquivalenzen

1. Negation:		formal
negiert:	Alle haben den Schuss gehört. Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\forall x \text{ gehört}(x)$ $\exists x \neg \text{gehört}(x)$
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg \text{gehört}(x)$

$\neg \forall i \in \text{Ind}: a_i < 10$ gdw $\neg \forall i (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$ gdw $\exists i \neg (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$ gdw $\exists i (i \in \text{Ind} \wedge \neg a_i < 10)$ gdw $\exists i \in \text{Ind}: a_i \geq 10$	$(\exists x P(x)) \rightarrow P(y)$ $\equiv \neg(\exists x P(x)) \vee P(y)$ $\equiv (\forall x \neg P(x)) \vee P(y)$ $\equiv \forall x (\neg P(x) \vee P(y))$ $\equiv \forall x (P(x) \rightarrow P(y))$
---	--

2. Zusammenfassung von Quantoren:

Äquivalent:
 $(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \wedge (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i) \text{ gdw } \forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$

Nicht äquivalent, vielmehr gilt nur:
Aus $(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \vee (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$ **folgt** $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens

Ziele:
Äquivalenzen anwenden

in der Vorlesung:
Erläuterungen dazu
• Anwendungsstellen zeigen,
• **jeder Schritt einzeln (PDF)**

Beispiel für Umformungen

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

$\neg(\exists x P(x, y) \vee \forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	DeMorgan
$\equiv (\neg \exists x P(x, y) \wedge \neg \forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	Negation von Quantorformeln (x, z)
$\equiv (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a$	Kommutativität
$\equiv \exists u f(a, u) = a \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))$	Wirkungsbereiche ausweiten (u, x)
$\equiv \exists u (f(a, u) = a \wedge \forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)))$	Kommutativität (2 mal)
$\equiv \exists u (\forall x (\exists z \neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereich ausweiten (z)
$\equiv \exists u (\forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a)$	Wirkungsbereiche ausweiten (x, z)
$\equiv \exists u \forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge f(a, u) = a)$	

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

© 2010 bei Prof. Dr. Uwe Kastens
überarbeitet 2006 Prof. Dr. W. Häußchild

Normalformen

- Definition:** Eine PL-Formel α ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen in α unmittelbar vor einer Primformel steht und α die Junktoren \rightarrow und \leftrightarrow nicht enthält.
- Definition:** Eine PL-Formel α ist in **pränexer Normalform (PNF)** genau dann, wenn sie von der Form $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \beta$ ist, wobei Q_i Quantoren sind und β keine Quantoren enthält.
- Satz:** Zu jeder PL-Formel gibt es **logisch äquivalente Formeln** in Negationsnormalform bzw. in pränexer Normalform.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 443

Ziele:

Normalformen kennen

in der Vorlesung:

Begriffe erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Erzeugung der PNF

Die Erzeugung der pränexen Normalform geschieht in zwei Schritten:

1. Konsistente **Umbenennung** der Variablen (siehe Folie 4.27)
2. Quantoren nach links mit Hilfe der folgenden **Ersetzungsregeln** (Äquivalenzen):
 - a. Ersetze $(\forall x\alpha) \wedge \beta$ durch $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ (wegen (1) kommt x nicht frei in β vor)
 - b. Ersetze $(\exists x\alpha) \wedge \beta$ durch $\exists x(\alpha \wedge \beta)$
 - c. Ersetze $(\forall x\alpha) \vee \beta$ durch $\forall x(\alpha \vee \beta)$
 - d. Ersetze $(\exists x\alpha) \vee \beta$ durch $\exists x(\alpha \vee \beta)$
 - e. Ersetze $\neg\forall x\alpha$ durch $\exists x\neg\alpha$
 - f. Ersetze $\neg\exists x\alpha$ durch $\forall x\neg\alpha$

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 444

Ziele:

Regeln zur Erzeugung der PNF kennen

in der Vorlesung:

Am Beispiel erläutern

nachlesen:

Kastens, Kleine Büning: Modellierung, Abschnitt 4.2

Komplexität der Prädikatenlogik erster Stufe

- Es gibt für die Prädikatenlogik erster Stufe einen **vollständigen, korrekten Kalkül** zur Herleitung allgemeingültiger Formeln.
- Die Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**, d. h. es gibt kein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist.
- Die Prädikatenlogik ist **rekursiv aufzählbar**, d. h. es gibt ein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist, das aber im negativen Fall nicht notwendig terminiert.
- Die **natürlichen Zahlen** lassen sich in der Prädikatenlogik erster Stufe **nicht** modellieren.

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 445

Ziele:

Grundsätzliche Aussagen über PL kennen

in der Vorlesung:

Aussagen erläutern

nachlesen:

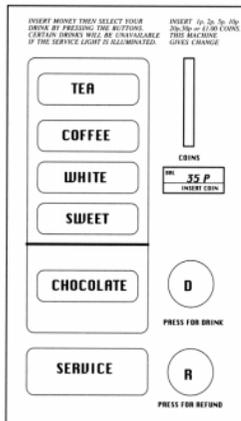
Kastens, Kleine Übung: Modellierung, Abschnitt 4.2

Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationsprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet **Prädikatenlogik**.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine“ aus

Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff



Get_Drink

```

ΔAbs_State_Machine
choice? : PSelection_buttons
d! : Drink
Change! : bag British_coin

choice? ∈ Drink
Value Balance ≥ Prices choice?
∀ i : Recipe choice? • count Stock i > 0
Cups > 0
∃ b : bag British_coins • (b ⊆ Takings ∧ Value Balance = Value b + Prices choice?)
Balance' = []
Stock' ⊔ {i : Recipe choice? • i ↦ 1} = Stock
Cups' = Cups - 1
Change! ⊆ Takings ∧ Value Balance = Value Change! + Prices choice?
Takings' ⊔ Change! = Takings
Prices' = Prices
Service_light' = Service_light
Report_display' = insert coin
d! = choice?
  
```

Vorlesung Modellierung WS 2011/12 / Folie 446

Ziele:

Ausschnitt aus einem größeren Beispiel

in der Vorlesung:

Erläuterungen zur

- Sprache Z,
- zur gestellten Aufgabe,
- zum Ausschnitt aus der Spezifikation