

## 4.2 Prädikatenlogik

Prädikatenlogik umfasst Aussagenlogik mit **atomaren Aussagen, Variablen, Junktoren**.  
Zusätzliche Konzepte:

- $A = (\mathcal{T}, \Sigma)$  ist die so genannte **Termalgebra** (mit Variablen, ohne Axiome) mit Signatur  $\Sigma = (\{T\}, F)$ , wobei  $T$  die Sorte „Term“ ist und alle Operationen  $f \in F$  von der Form  $f: T^n \rightarrow T$  sind. **Terme** sind die korrekten Terme bzgl. dieser Termalgebra.
- **n-stellige Prädikate** sind Operationen  $P: T^n \rightarrow \text{BOOL}$ . In einer Konkretisierung entsprechen ihnen n-stellige Relationen,  
z. B. „x ist eine Katze“ bzw. als Formel:  $\text{istKatze}(x)$   
 $\text{teilt}(a,b)$ ,  $\text{größterGemeinsamerTeiler}(a, b, g)$
- **Quantoren** „für alle x gilt  $\alpha$ “ und „es gibt ein x, so dass  $\alpha$  gilt“  
in Symbolen:  $\forall x \alpha$  bzw.  $\exists x \alpha$   
Beispiel:  $\forall x (\text{esIstNacht} \wedge \text{istKatze}(x) \rightarrow \text{istGrau}(x))$ ;  
in Worten: „Nachts sind alle Katzen grau.“

Schon zur **Modellierung** einfacher Aufgaben braucht man Konzepte der **Prädikatenlogik**,

z. B. **größter gemeinsamer Teiler**:

gegeben:  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ;  
gesucht: **größter gemeinsamer Teiler**  $g$  von  $a$  und  $b$ , d. h.  
 $\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow h \leq g))$

## Vorschau auf Begriffe

Ähnliche Folge von Begriffen wie in der Aussagenlogik:

- **prädikatenlogische Formeln** als Sprache der Prädikatenlogik  
Syntax: Terme, Prädikate, logische Junktoren, Quantoren
- **gebundene** und **freie Variable**
- **Individuenbereich**: allgemeiner Wertebereich für Variable und Terme
- **Belegung** von Variablen mit Werten aus dem Individuenbereich
- **Interpretation**: Variablenbelegung und Definition der Funktionen und Prädikate
- **erfüllbar, allgemeingültig, widerspruchsvoll**:  
wie in der Aussagenlogik definiert
- **logischer Schluss**: wie in der Aussagenlogik definiert
- **Gesetze zum Umformen** von Formeln mit Quantoren

## Prädikatenlogische Formeln

**Prädikatenlogische Formeln** (PL-Formeln) werden induktiv wie folgt definiert:

1. **Primformeln** sind Anwendungen von Prädikaten in der Form  $P(t_1, \dots, t_n)$  oder Gleichungen in der Form  $t_1 = t_2$ .  
Dabei ist  $P$  ein n-stelliges Prädikatsymbol und die  $t_i$  sind Terme der Termalgebra.  
**0-stellige Prädikatsymbole** entsprechen den atomaren **Aussagen der Aussagenlogik**.
2. **logische Junktoren** bilden prädikatenlogische Formeln:  
 $\neg \alpha$     $\alpha \wedge \beta$     $\alpha \vee \beta$   
**sowie**  $\alpha \rightarrow \beta$     $\alpha \leftrightarrow \beta$  **als Abkürzungen**  
mit prädikatenlogischen Formeln  $\alpha$  und  $\beta$
3. der **Allquantor**  $\forall$  und der **Existenzquantor**  $\exists$  bilden prädikatenlogische Formeln:  
 $\forall x \alpha$  und  $\exists x \alpha$   
mit der prädikatenlogischen Formel  $\alpha$ ; sie definieren die Variable  $x$

Nur nach (1. - 3.) gebildete Formeln sind **syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln**.

**Quantoren** haben die gleiche **Präzedenz** wie  $\neg$ , also höhere als  $\wedge$

Beispiele:

$\text{teilt}(g, a) \wedge \text{teilt}(g, b) \wedge (\forall h (\text{teilt}(h, a) \wedge \text{teilt}(h, b) \rightarrow h \leq g))$  (siehe Folie 4.21)

$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z)$  „R ist eine Funktion“

## Anmerkungen zu prädikatenlogischen Formeln

- **Prädikatsymbole und Operationssymbole** in Termen erhalten ihre Bedeutung erst durch die **Interpretation** der Formel (wie bei abstrakten Algebren), aber
- **Prädikate und Operationen werden häufig nicht explizit definiert**, sondern mit üblicher Bedeutung der Symbole angenommen.
- **Signatur  $\Sigma$  wird meist nicht explizit angegeben**, sondern aus den Operationen angenommen, die in den Termen verwendet werden.
- Hier: **Prädikatenlogik erster Stufe**: **Variable** sind nur als Operanden in Termen erlaubt, aber **nicht für Funktionen oder für Prädikate**. Nur solche Variablen dürfen quantifiziert werden.



## Beispiel für eine passende Interpretation zu einer Formel

Zur Formel  $\alpha = (\forall x P(x, h(x))) \wedge Q(g(a, z))$  ist folgendes  $\mathfrak{I}$  eine passende Interpretation:

$U := \mathbb{N}$

$\mathfrak{I}(P) := \{ (m, n) \mid m, n \in U \text{ und } m < n \}$

$\mathfrak{I}(Q) := \{ n \mid n \in U \text{ und } n \text{ ist Primzahl} \}$

$\mathfrak{I}(h)$  ist die Nachfolgerfunktion auf  $U$ , also  $\mathfrak{I}(h)(n) = n + 1$

$\mathfrak{I}(g)$  ist die Additionsfunktion auf  $U$  also  $\mathfrak{I}(g)(m, n) = m + n$

$\mathfrak{I}(a) := 2$  (a ist eine Konstante, d.h. eine 0-stellige Funktion,  $2 \in U$ )

$\mathfrak{I}(z) := n$  (z ist eine freie Variable,  $n \in U$ )

Bemerkungen:

- Häufig wird die Interpretation von Funktions- und Prädikatssymbolen nicht explizit angegeben, sondern die „übliche Bedeutung der Symbole“ angenommen.
- Die Anwendung von  $\mathfrak{I}$  zeigt, wie die Variablen der Quantoren Werte erhalten (Folie 4.31).

Das Beispiel stammt aus

U. Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Aufl., 1995, S. 55

## Wahrheitswerte prädikatenlogischer Formeln

Sei  $\alpha$  eine prädikatenlogische Formel und  $\mathfrak{I}$  eine dazu passende Interpretation, dann berechnet man den **Wahrheitswert**  $\mathfrak{I}(\alpha)$ , indem man  $\mathfrak{I}$  **rekursiv anwendet** auf die Teile von  $\alpha$ :

- die **Prädikatsymbole und deren Terme**,
- die **Funktionssymbole und deren Terme**,
- die **freien und gebundenen Variablen**,
- die **mit Junktoren verknüpften Teilformeln** und
- die **Quantor-Formeln**.

## Interpretation von PL-Formeln (vollständige Definition)

Die Interpretation der Symbole wird auf prädikatenlogische Formeln, deren Variablen konsistent umbenannt sind, erweitert:

Für jeden Term  $h(t_1, \dots, t_n)$  wird definiert:  $\mathfrak{I}(h(t_1, \dots, t_n)) = \mathfrak{I}(h)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$ .

Für Formeln gilt (Definition durch Induktion über den Aufbau der prädikatenlogischen Formeln):

1.  $\mathfrak{I}(P(t_1, \dots, t_n)) = w$  genau dann, wenn  $(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in \mathfrak{I}(P)$
2.  $\mathfrak{I}(t_1 = t_2) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$
3.  $\mathfrak{I}(\neg\alpha) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = f$
4.  $\mathfrak{I}(\alpha \wedge \beta) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  **und**  $\mathfrak{I}(\beta) = w$
5.  $\mathfrak{I}(\alpha \vee \beta) = w$  genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  **oder**  $\mathfrak{I}(\beta) = w$
6.  $\mathfrak{I}(\forall x\alpha) = w$  genau dann, wenn **für jeden Wert  $d \in U$  gilt**  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$
7.  $\mathfrak{I}(\exists x\alpha) = w$  genau dann, wenn es **einen Wert  $d \in U$  gibt** mit  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha) = w$

Dabei ordnet  $\mathfrak{I}_{[x/d]}(\alpha)$  in  $\alpha$  der Variablen  $x$  den Wert  $d$  zu und stimmt sonst mit der gerade angewandten Interpretation  $\mathfrak{I}$  überein.

## Beispiel für Interpretation einer Formel

Formel  $\alpha$ :

$R \wedge \forall x \forall y P(x, y)$

Interpretation  $\mathfrak{I}$ :

$U = \{ 1, 2, 3 \}$

$\mathfrak{I}(P) = \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$

$\mathfrak{I}(R) = w$

Interpretation  $\mathfrak{I}$  **rekursiv gemäß Mod-4.31 angewandt**:

- Nr.:  $\mathfrak{I}(R \wedge \forall x \forall y P(x, y))$
- 4 =  $\mathfrak{I}(R)$  und  $\mathfrak{I}(\forall x \forall y P(x, y))$
- 5,6,6 =  $w$  und für jedes  $d, e \in U$  gilt  $\mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P(x, y))$
- 1 =  $w$  und für jedes  $d, e \in U$  gilt  $(\mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(x), \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(y)) \in \mathfrak{I}_{[x/d, y/e]}(P)$
- 5 =  $w$  und für jedes  $d, e \in \{ 1, 2, 3 \}$  gilt  $(d, e) \in \{ (a, b) \mid a + b < 10 \}$
- =  $w$  und  $w$
- =  $w$

### Elementare Interpretationen

Wir betrachten für die Beispiele A bis G eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  mit Individuenbereich  $U = \mathbb{N}$ .

- a. freie Variable:  $\mathfrak{I}(u) = 1 \in U, \mathfrak{I}(v) = 2 \in U$  (bestimmte Elemente von U)
- b. 0-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(A) = w$  oder  $\mathfrak{I}(A) = f$  (boolesche Variable)
- c. 1-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(P) = M := \{1, 2, 3\} \subseteq U$  (Teilmenge von U)
- d. 2-stellige Prädikate:  $\mathfrak{I}(Q) = R := \{(1, 2), (2, 2)\} \subseteq U \times U$  (Relation auf U)
  
- A.  $\mathfrak{I}(P(u)) = w$       gdw  $\mathfrak{I}(u) \in \mathfrak{I}(P)$ , d. h.  $1 \in M$
- B.  $\mathfrak{I}(Q(u, v)) = w$       gdw  $(\mathfrak{I}(u), \mathfrak{I}(v)) \in \mathfrak{I}(Q)$ , d. h.  $(1, 2) \in R$
- C.  $\mathfrak{I}(\forall x P(x)) = w$       gdw (Für alle  $d \in U$  gilt:  $d \in M$ ) = f, d. h.  $M \neq \emptyset$
- D.  $\mathfrak{I}(\exists x P(x)) = w$       gdw Es existiert  $d \in U$  mit  $d \in M, M \neq \emptyset$
- E.  $\mathfrak{I}(\forall x Q(x, x)) = w$       gdw (Für alle  $d \in U$  gilt:  $(d, d) \in R$ ) = f, d. h. R ist nicht reflexiv
- F.  $\mathfrak{I}(\exists x Q(x, x)) = w$       gdw Es gibt ein  $d \in U$  mit  $(d, d) \in R$ , d. h. R ist nicht irreflexiv
- G.  $\mathfrak{I}(\forall x \forall y (Q(x, y) \wedge Q(y, x) \rightarrow x = y)) = w$   
 gdw Für alle  $d, e \in U$  gilt: aus  $(d, e) \in R$  und  $(e, d) \in R$  folgt  $d = e$ ,  
 d. h. R ist antisymmetrisch

### Beschränkung von Wertebereichen

In der **Prädikatenlogik** kann die **Interpretation von Variablen** Werte aus dem **gesamten Individuenbereich U** annehmen (im Unterschied zu einem **Wertebereich**). Deshalb muss eine **Einschränkung explizit als Relation** formuliert werden.

**Beschränkung des Wertebereiches bei Allquantoren durch Implikation  $\rightarrow$ :**  
 „Für alle  $m \in U$  gilt: **aus**  $m \in M$  **folgt**  $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\forall m \in M: Q(m, n)$ “

- als PL-Formel:  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x, y))$
- ausführliche Notation:      abkürzende Notation:
- Beispiele: Für alle  $i \in U$  gilt: aus  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  folgt  $b_i = a_i^2$        $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}: b_i = a_i^2$
- Für alle  $k \in U$  gilt: aus  $k \in \mathbb{N}$  folgt  $a + k \geq a$        $\forall k \in \mathbb{N}: a + k \geq a$

**Beschränkung des Wertebereiches bei Existenzquantoren durch Konjunktion  $\wedge$ :**  
 „Es gibt ein  $m \in U$ , sodass  $m \in M$  **und**  $Q(m, n)$ “ oder abgekürzt „ $\exists m \in M: Q(m, n)$ “

- PL-Formel:  $\exists x (P(x) \wedge Q(x, y))$
- Beispiele: Es gibt ein  $k \in U$ , sodass  $k \in \mathbb{N}$  **und**  $a * k = b$        $\exists k \in \mathbb{N}: a * k = b$
- Es gibt ein  $i \in U$ , sodass  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  **und**  $a_i = x$        $\exists i \in \{1, 2, 3, 4\}: a_i = x$

### Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (1)

Die Variablen in Gleichungen konkreter Algebren sind durch Allquantoren gebunden:

- Axiom K3:**  $\text{pop}(\text{push}(k, x)) \rightarrow k$  (in der abstrakten Keller-Algebra)
- Gleichung:**  $\forall a \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$  (konkrete Algebra)
- PL-Formel:**  $\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)$
- Interpretation:**  $U = \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N}, \mathfrak{I}(S) = \mathbb{N}, \mathfrak{I}(P) = \mathbb{N}^*$   
 $\mathfrak{I}(h) = \text{remove}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ ,  
 $\mathfrak{I}(g) = \text{append}: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$
- Es gilt:**  $\mathfrak{I}(\forall k \forall x (P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k)) = w$   
 gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \mathfrak{I}_{[k/a, x/n]}(P(k) \wedge S(x) \rightarrow h(g(k, x)) = k) = w$   
 gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \text{Aus } a \in \mathbb{N}^* \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ folgt: } \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$   
 gdw  $\forall a \in \mathbb{N}^* \cup \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \text{remove}(\text{append}(a, n)) = a$

### Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (2)

Aus der Analysis:

- Eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a(n) = a_n$ , heißt Nullfolge, wenn gilt  
 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n_0 < n : |a_n| < \varepsilon$   
 Dreifache Schachtelung der Quantoren; Reihenfolge ist wichtig!
- PL-Formel  $\alpha$ :  $\forall x(P_1(x) \rightarrow \exists y(P_2(y) \wedge \forall z(P_2(z) \wedge Q(y, z)) \rightarrow Q(h(z), x)))$
- Interpretation:  $U = \mathbb{R}, \mathfrak{I}(P_1) = \mathbb{R}^+, \mathfrak{I}(P_2) = \mathbb{N}$ ,  
 $\mathfrak{I}(Q) = \{(r, s) \mid (r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \text{ und } r < s\}$ ,  
 $\mathfrak{I}(h) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \mathfrak{I}(h)(i) = |a_i|$
- Es gilt:  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$       gdw  $a_n$  ist eine Nullfolge

## Beispiele für PL-Formeln und deren Interpretation (3)

Aus der Informatik:

Eine Folge  $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$  heißt monoton wachsend, wenn gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}: \forall j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } i \leq j \text{ gilt } a_i \leq a_j$$

PL-Formel  $\beta$ :  $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((P(y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow Q(h(x), h(y))))$

Interpretation:  $U = \mathbb{N}^k \cup \{1, \dots, k\}, \mathfrak{I}(P) = \{1, \dots, k\},$

$$\mathfrak{I}(Q) = \{ (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n \}$$

$$\mathfrak{I}(h) : \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{N}, \mathfrak{I}(h)(i) = a_i$$

Es gilt:  $\mathfrak{I}(\beta) = w$  gdw  $a_n$  ist monoton wachsend

Was bedeutet  $\mathfrak{I}(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (Q(h(x), h(y)) \wedge (h(x) = h(y) \rightarrow Q(x, y)))) = w$  mit  $\mathfrak{I}(x) = i, i \in \{1, \dots, k\}$ , bei sonst unveränderter Interpretation?

## Beispiel: Spezifikation des n-Damen-Problems

gegeben:

Kantenlänge  $n \in \mathbb{N}$  eines  $n * n$  Schachbrettes

gesucht:

Menge P zulässiger Platzierungen von jeweils n Damen auf dem Schachbrett, so dass keine Dame eine andere nach Schachregeln schlägt:

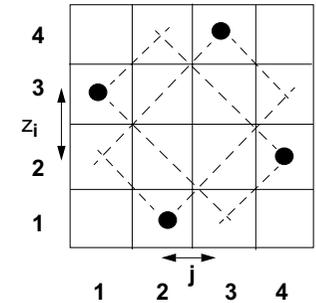
Sei Index :=  $\{1, \dots, n\}$

$$P := \{ p \mid p = (z_1, \dots, z_n) \in \text{Index}^n \wedge \text{zulässig}(p) \}$$

$z_i$  gibt die Zeilennummer der Dame in Spalte  $i$  an.

Dabei bedeutet

$$\text{zulässig}(p) : \forall i \in \text{Index}: \forall j \in \text{Index}: i \neq j \rightarrow z_i \neq z_j \wedge |z_i - z_j| \neq |i - j|$$



## Erfüllbarkeit und logischer Schluss

Die folgenden Begriffe sind in der Prädikatenlogik so **definiert wie in der Aussagenlogik**.

**Aber:** Interpretationen der Prädikatenlogik sind komplexe Strukturen.

Deshalb sind die Eigenschaften „**erfüllbar**“ und „**allgemeingültig**“ für prädikatenlogische Formeln **nicht allgemein entscheidbar**.

- Wenn für eine Interpretation  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$  gilt, heißt  $\mathfrak{I}$  auch ein **Modell der Formel**  $\alpha$ .
- Eine Formel  $\alpha$  heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  gibt, so dass gilt  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ , sonst ist sie **widerspruchsvoll**.
- Eine Formel  $\alpha$  heißt **allgemeingültig** oder **Tautologie**, wenn für alle Interpretationen von  $\alpha$  gilt  $\mathfrak{I}(\alpha) = w$ , sonst ist sie **falsifizierbar**.
- Eine Formel  $\alpha$  ist genau dann **allgemeingültig**, wenn  $\neg \alpha$  **widerspruchsvoll** ist.
- Zwei Formeln  $\alpha$  und  $\beta$  sind **logisch äquivalent**, in Zeichen:  $\alpha \equiv \beta$ , wenn sie für alle Interpretationen  $\mathfrak{I}$  dasselbe Ergebnis haben:  $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\beta)$
- Sei F eine Menge von Formeln und  $\alpha$  eine Formel. Wenn für **alle Interpretationen**  $\mathfrak{I}$ , die alle Formeln in F erfüllen, auch  $\mathfrak{I}(\alpha)$  gilt, dann sagen wir, „ $\alpha$  **folgt semantisch aus F**“ bzw.  $F \models \alpha$ ;  $F \models \alpha$  heißt auch **logischer Schluss**.

## Äquivalente Umformung prädikatenlogischer Formeln

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige prädikatenlogische Formeln. Dann gelten folgende **Äquivalenzen**:

1. **Negation:**

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

2. **Wirkungsbereich der Quantoren verändern:**

Falls  $x$  in  $\beta$  nicht frei vorkommt, gilt

$$(\forall x \alpha) \wedge \beta \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\forall x \alpha) \vee \beta \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$$

$$(\exists x \alpha) \wedge \beta \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\exists x \alpha) \vee \beta \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

$$\beta \equiv \exists x \beta$$

$$\beta \equiv \forall x \beta$$

3. **Quantoren zusammenfassen:**

$$(\forall x \alpha \wedge \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$$

$$(\exists x \alpha \vee \exists x \beta) \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$$

Folgende Formelpaare sind im allgemeinen **nicht äquivalent**:

$$(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \not\equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$$

$$(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \not\equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$$

4. **Quantoren vertauschen:**

$$\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$$

## Beispiele für Äquivalenzen

Mod-4.41

### 1. Negation: formal

negiert:	Alle haben den Schuss gehört. Es gibt einen, der den Schuss nicht gehört hat.	$\forall x \text{ gehört}(x)$ $\exists x \neg \text{gehört}(x)$
falsch negiert:	Alle haben den Schuss nicht gehört.	$\forall x \neg \text{gehört}(x)$

$\neg \forall i \in \text{Ind}: a_i < 10$   
 gdw  $\neg \forall i (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$   
 gdw  $\exists i \neg (i \in \text{Ind} \rightarrow a_i < 10)$   
 gdw  $\exists i (i \in \text{Ind} \wedge \neg a_i < 10)$   
 gdw  $\exists i \in \text{Ind}: a_i \geq 10$

$(\exists x P(x)) \rightarrow P(y)$   
 $\equiv \neg (\exists x P(x)) \vee P(y)$   
 $\equiv (\forall x \neg P(x)) \vee P(y)$   
 $\equiv \forall x (\neg P(x) \vee P(y))$   
 $\equiv \forall x (P(x) \rightarrow P(y))$

### 2. Zusammenfassung von Quantoren:

#### Äquivalent:

$(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \wedge (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$  gdw  $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \wedge 0 < a_i)$

#### Nicht äquivalent, vielmehr gilt nur:

**Aus**  $(\forall i \in \text{Ind}: a_i < 10) \vee (\forall i \in \text{Ind}: 0 < a_i)$  **folgt**  $\forall i \in \text{Ind}: (a_i < 10 \vee 0 < a_i)$

## Beispiel für Umformungen

Mod-4.42

Die folgende prädikatenlogische Formel wird so umgeformt, dass alle Quantoren vorne (außen) stehen:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x P(x, y) \vee \forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a && \text{DeMorgan} \\ \equiv & (\neg \exists x P(x, y) \wedge \neg \forall z Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a && \text{Negation von Quantorformeln } (x, z) \\ \equiv & (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) \wedge \exists u f(a, u) = a && \text{Kommutativität} \\ \equiv & \exists u f(a, u) = a \wedge (\forall x \neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z)) && \text{Wirkungsbereiche ausweiten } (u, x) \\ \equiv & \exists u (f(a, u) = a \wedge \forall x (\neg P(x, y) \wedge \exists z \neg Q(z))) && \text{Kommutativität (2 mal)} \\ \equiv & \exists u (\forall x (\exists z \neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a) && \text{Wirkungsbereich ausweiten } (z) \\ \equiv & \exists u (\forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y)) \wedge f(a, u) = a) && \text{Wirkungsbereiche ausweiten } (x, z) \\ \equiv & \exists u \forall x \exists z (\neg Q(z) \wedge \neg P(x, y) \wedge f(a, u) = a) \end{aligned}$$

In diesem Beispiel hätten die Quantoren auch in anderer Reihenfolge enden können, wenn in anderer Reihenfolge umgeformt worden wäre. Das ist nicht allgemein so.

## Normalformen

Mod-4.43

- Definition:** Eine PL-Formel  $\alpha$  ist in **Negationsnormalform (NNF)** genau dann, wenn jedes Negationszeichen in  $\alpha$  unmittelbar vor einer Primformel steht und  $\alpha$  die Junktoren  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  nicht enthält.
- Definition:** Eine PL-Formel  $\alpha$  ist in **pränexer Normalform (PNF)** genau dann, wenn sie von der Form  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \beta$  ist, wobei  $Q_i$  Quantoren sind und  $\beta$  keine Quantoren enthält.
- Satz:** Zu jeder PL-Formel gibt es **logisch äquivalente Formeln** in Negationsnormalform bzw. in pränexer Normalform.

## Erzeugung der PNF

Mod-4.44

Die Erzeugung der pränexen Normalform geschieht in zwei Schritten:

- Konsistente **Umbenennung** der Variablen (siehe Folie 4.27)
- Quantoren nach links mit Hilfe der folgenden **Ersetzungsregeln** (Äquivalenzen):
  - Ersetze  $(\forall x \alpha) \wedge \beta$  durch  $\forall x (\alpha \wedge \beta)$  (wegen (1) kommt  $x$  nicht frei in  $\beta$  vor)
  - Ersetze  $(\exists x \alpha) \wedge \beta$  durch  $\exists x (\alpha \wedge \beta)$
  - Ersetze  $(\forall x \alpha) \vee \beta$  durch  $\forall x (\alpha \vee \beta)$
  - Ersetze  $(\exists x \alpha) \vee \beta$  durch  $\exists x (\alpha \vee \beta)$
  - Ersetze  $\neg \forall x \alpha$  durch  $\exists x \neg \alpha$
  - Ersetze  $\neg \exists x \alpha$  durch  $\forall x \neg \alpha$

## Komplexität der Prädikatenlogik erster Stufe

- Es gibt für die Prädikatenlogik erster Stufe einen **vollständigen, korrekten Kalkül** zur Herleitung allgemeingültiger Formeln.
- Die Prädikatenlogik ist **unentscheidbar**, d. h. es gibt kein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist.
- Die Prädikatenlogik ist **rekursiv aufzählbar**, d. h. es gibt ein Verfahren, das für eine beliebige PL-Formel feststellen kann, ob sie allgemeingültig ist, das aber im negativen Fall nicht notwendig terminiert.
- Die **natürlichen Zahlen** lassen sich in der Prädikatenlogik erster Stufe **nicht** modellieren.

## Ausschnitt aus einer Spezifikation in Z

Die **Spezifikationsprache Z** basiert auf typisierter Mengentheorie (Wertebereiche wie in Abschnitt 2) und verwendet **Prädikatenlogik**.

Ausschnitt aus der Fallstudie „A Drinks Dispensing Machine“ aus  
Deri Sheppard: An Introduction to Formal Specification with Z and VDM, McGraw-Hill, 1994, S. 271ff

